Fakulteta za organizacijske študije

Faculty of organisation studies

POSLOVNA MATEMATIKA

JANEZ USENIK,
MATIJA VIDIČEK

Fakulteta za
organizacijske študije
Faculty of organisation studies

Prof. ddr. Janez Usenik
Matija Vidiček

Poslovna matematika

Novo mesto, 2020

Poslovna matematika
Janez Usenik, Matija Vidiček

Strokovna recenzija:
Red. prof. dr. Robert Vodopivec
Doc. dr. Franc Brcar

Založila: Fakulteta za organizacijske študije Novo mesto

Dostop do gradiva: https://www.fos-unm.si/si/dejavnosti/zaloznistvo/

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID=18642179
ISBN 978-961-6974-53-0 (epub)
ISBN 978-961-6974-54-7 (pdf)
ISBN 978-961-6974-55-4 (mobi)

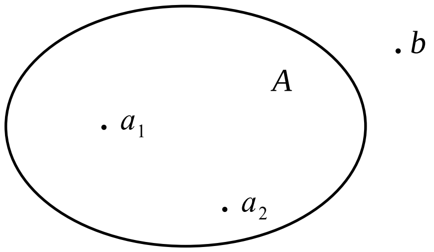
Kazalo vsebine

1 MNOŽICE

1.1 Splošno o množicah

Množice označujemo z velikimi črkami *A, B, C, ...* ***Elemente*** množice označujemo z malimi črkami: $a, b, c, \ldots$ ali $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ali $b_1, b_2, b_3, \ldots$ in podobno. Pripadnost posameznega elementa dani množici zaznamujemo z znakom $\in$, znak $\notin$ pa pomeni, da opazovani element ne pripada dani množici. Množica je določena, če obstaja pravilo, po katerem je mogoče za vsak element odločiti, ali spada v množico ali ne. Množice si grafično predstavljamo z *Vennovimi diagrami*[1] (slika 1), kjer posamezne točke predstavljajo elemente množice.

Primer:
Na sliki 1 je narisana množica A z dvema elementoma a_1 in a_2, $a_1 \in A$, $a_2 \in A$. Element b pa ne spada v množico, torej $b \notin A$.



Slika 1: Množica A z elementoma a_1 in a_2

♦ ♦ ♦

Množice opisujemo na dva načina:

a) navedemo elemente, ki sestavljajo množico in sicer
   - če je elementov malo, naštejemo vse,
   - če je elementov veliko, zapišemo le nekaj začetnih, vendar toliko, da je iz zapisa razvidno, kateri elementi sledijo dalje,

b) navedemo lastnost, ki povezuje elemente množice.

[1] John Venn (1834 – 1923), britanski matematik in filozof

Primer:
Zapišimo množice *A, B, C* in *D,* če:

a) množica *A* vsebuje elemente a_1, a_2, a_3 in a_4,
b) množica *B* vsebuje naravna števila od 1 do 10,
c) množica *C* vsebuje vsa naravna števila od 1 do 1000,
d) elementi množice *C* so vse točke (x, y) na realni ravnini, ki ležijo na krožnici $x^2 + y^2 = 9$.

Rešitev:

a) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
b) $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
c) $C = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 1000\}$ ali $C = \{\, c \mid c \le 1000, c \in N\}$
d) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\,;\, x, y \in R\}$

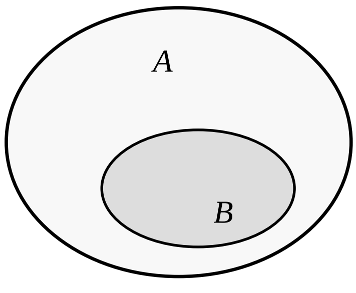
Opomba: Z znakom ***N*** smo označili množico naravnih števil, z ***R*** pa množico realnih števil.
♦ ♦ ♦

Definicija: ***Moč množice*** *je število, ki pove, koliko elementov je v množici. Moč množice A označimo* **m(A)**.

Če ima množica končno elementov, ji pravimo *končna množica,* če ima množica neskončno mnogo elementov, je *neskončna množica*.

Množico, ki nima nobenega elementa, imenujemo *prazna množica* in jo označimo z znakom $\varnothing$. Moč prazne množice je enaka nič: $m(\varnothing) = 0$.

Definicija: *Kadar je vsak element iz množice B hkrati tudi v množici A, se B imenuje* ***podmnožica*** *množice A, kar označimo $B \subseteq A$ (slika 2). Če velja hkrati $B \subseteq A$ in $A \subseteq B$, potem sta množici A in B* ***enaki***: *A = B.*



Slika 2: Množica *B* je podmnožica množice *A*

<u>Definicija</u>: ***Potenčna množica*** $P(A)$ *je množica, katere elementi so vse podmnožice dane množice A. K podmnožicam štejemo tudi prazno množico in množico* samo. *Moč potenčne množice je* $m\ P(A) = 2^{m(A)}$.

<u>Primer:</u>
Množica $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ ima tri elemente, zato ima njena potenčna množica $2^{m(A)} = 2^3 = 8$ elementov.

$$P(A) = \{\varnothing,\ \{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_3\},\ \{a_1, a_2\},\ \{a_1, a_3\},\ \{a_2, a_3\},\ \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

♦ ♦ ♦

<u>Definicija</u>: *Množici, ki vsebuje vse množice kot svoje podmnožice, pravimo* ***univerzalna množica*** *(ali krajše tudi kar univerzum) in jo označimo z znakom U.* Vennov diagram za univerzalno množico ima obliko pravokotnika (slika 3).

Slika 3: Vennov diagram za univerzalno množico *U*

<u>Definicija</u>: ***Unija*** *dveh množic A in B je množica, ki vsebuje vse elemente iz prve* <u>**ali**</u> *iz druge množice. Unijo množic A in B označimo takole:* $A \cup B$.

<u>Definicija</u>: ***Presek*** *dveh množic A in B je množica, ki vsebuje tiste elemente, ki pripadajo prvi* <u>**in**</u> *drugi množici hkrati. Presek množic A in B označimo takole:* $A \cap B$.

Unijo in presek lahko posplošimo na poljubno število množic:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Iz definicije unije in preseka lahko ugotovimo njune *<u>lastnosti:</u>*

1. komutativnost:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A \qquad (1.01)$$

2. asociativnost:

$$(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) = A\cup B\cup C$$
$$(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C) = A\cap B\cap C \qquad (1.02)$$

3. distributivnost:

$$A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C)$$
$$A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C) \qquad (1.03)$$

Primer :

Dani sta množici $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ in $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$.

Določimo: a) $A\cup B$, b) $A\cap B$, c) $P(A)$, d) $m(B)$.

Rešitev:

a) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$

b) $A\cap B=\{1, 2\}$

c) $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

d) $m(B)=4$

♦ ♦ ♦

Primer:

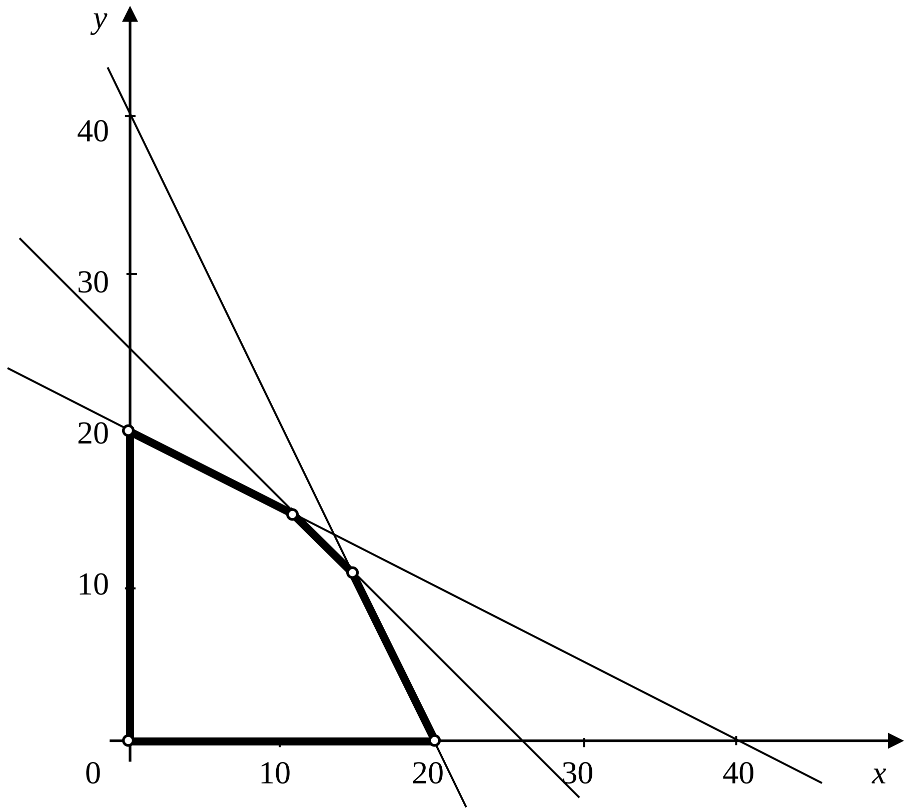
Na ravnini (x,y) je dana množica

$A=\{(x,y)\,;\, x+2y\le 40,\ 2x+y\le 40, x+y\le 25, x\ge 0, y\ge 0\}$.

Narišimo to množico točk v pravokotnem koordinatnem sistemu.

Rešitev:

Izrazi $x+2y\le 40,\ 2x+y\le 40, x+y\le 25, x\ge 0$ in $y\ge 0$ so polravnine na ravnini (x,y). Skupen presek vseh petih polravnin je množica vseh točk na ravnini znotraj in na robu petkotnika, označenega na sliki 4.

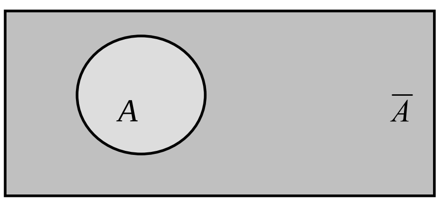


Slika 4: Grafični prikaz množice
$A = \{(x,y)\,;\, x+2y \le 40,\ 2x+y \le 40, x+y \le 25, x \ge 0, y \ge 0\}$

♦ ♦ ♦

Definicija: ***Razlika*** *množic A in B je množica, ki vsebuje vse tiste elemente, ki so v množici A, niso pa v množici B. Razliko označimo* $A \setminus B$ *in preberemo "A minus B" ali tudi "A brez B". Podobno lahko vpeljemo razliko* $B \setminus A$.

Definicija: ***Komplement*** *množice A glede na univerzum U je množica, ki vsebuje vse tiste elemente, ki so iz množice U, vendar pa niso v A (slika 5). Znak za komplement je* $\overline{A}$, *včasih pa tudi* A^C.



Slika 5: Množica A in njen komplement $\overline{A}$

Iz definicije komplementarne množice izpeljemo nekatere uporabne relacije:

$$A \cup \overline{A} = U \tag{1.04}$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset \tag{1.05}$$
$$A \cup U = U \tag{1.06}$$
$$A \cap U = A \tag{1.07}$$
$$\overline{U} = \emptyset \tag{1.08}$$
$$\overline{\emptyset} = U \tag{1.09}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1.10}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.11}$$

Lastnosti (1.10) in (1.11) se imenujeta *De Morganovi pravili*.

Definicija: ***Kartezični produkt*** $A \times B$ *nepraznih množic A in B je množica, katere elementi so vsi možni urejeni pari, pri čemer je prvi element iz vsakega para iz prve in drugi element iz druge množice.*

$$A \times B = \{(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$$

Število elementov (moč) kartezičnega produkta je enaka produktu moči prve in moči druge množice

$$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B) \tag{1.12}$$

Primer:
Moč množice $A = \{a_1,\ a_2\}$ je $m(A) = 2$, moč množice $B = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ je $m(B) = 3$.
Kartezični produkt teh dveh množic je množica 6 urejenih parov:

$$A \times B = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}.$$

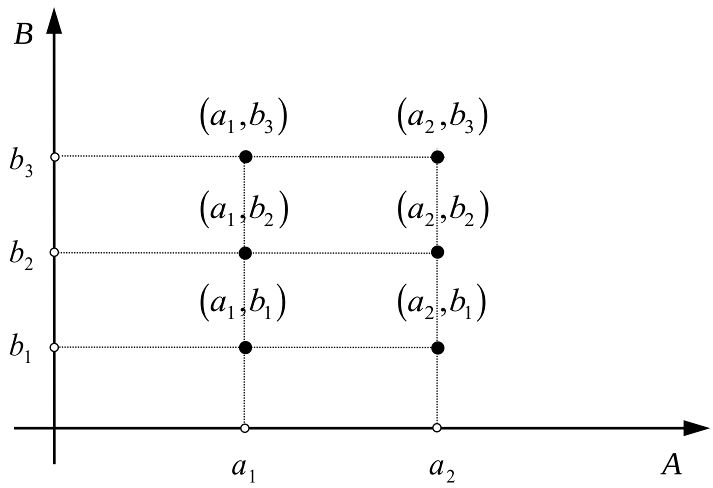
Res je $m(A \times B) = m(A) \cdot m(B) = 2 \cdot 3 = 6$.

♦ ♦ ♦

Kartezični produkt dveh množic lahko predstavimo tudi grafično v pravokotnem koordinatnem sistemu na ravnini. Elementom prve množice priredimo točke na vodoravni osi, elementom druge množice pa priredimo točke na navpični osi. Elementi kartezičnega produkta, ki po definiciji pomenijo urejene pare, kjer je vedno prvi element iz prve, drugi element pa iz druge množice, predstavljajo točke na ravnini.

Primer:
V pravokotnem koordinatnem ravninskem sistemu narišimo množici $A = \{a_1, a_2\}$ in $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ter njun kartezični produkt $A \times B$.

Rešitev:



Slika 6: Kartezični produkt množic $A=\{a_1, a_2\}$ in $B=\{b_1, b_2, b_3\}$

♦ ♦ ♦

1.2 Številske množice

V tem poglavju si na kratko oglejmo množice, katerih elementi so števila. Gre za naslednjih pet množic: množica *naravnih* števil, množica *celih* števil, množica *racionalnih* števil, množica *realnih* števil in množica *kompleksnih* števil in jih zaporedoma označimo ***N, Z, R, Q*** in ***C***.

Začnemo z najpreprostejšo množico naravnih števil in nato pojem števila razširimo na cela števila, nato na racionalna števila, pa na realna števila in končno vpeljemo še kompleksna števila. Pri tem je vsaka množica podmnožica naslednje: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

1.2.1 Naravna števila

Naravna števila so tista, s katerimi štejemo predmete, torej 1, 2, 3 itd., kar označimo $\boldsymbol{N}=\{1,2,3,4,\ldots\}$. Naravna števila so urejena po velikosti, kar pomeni, da za poljubni števili $a, b \in \boldsymbol{N}$ velja natanko ena od možnosti: a je manjši, enak ali večji od *b*, kar zaporedoma označimo: $a<b,\ a=b$ in $a>b$.

Naravna števila so sestavljena iz *sodih* ali parnih števil: $\boldsymbol{S}=\{2,4,6,\ldots\}$ ter *lihih* ali neparnih števil: $\boldsymbol{L}=\{1,3,5,\ldots\}$ z lastnostjo $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{L}$.

V množici naravnih števil sta vedno izvedljivi računski operaciji *seštevanje* in *množenje.* To pomeni, da sta za poljubni naravni števili $a, b \in \boldsymbol{N}$ tudi njuna *vsota* $a+b$ in njun *produkt* $a \cdot b$ vedno naravni števili, torej elementa množice ***N***.
Odštevanje in *deljenje* v množici naravnih števil nista vedno izvedljivi. *Razlika* $a-b$ je naravno število le, če je $a>b$, *količnik* $a : b$ pa je naravno število le, če je a večkratnik števila *b,* torej $a = mb$ in je $m \in \boldsymbol{N}$.

Za operaciji seštevanje in množenje velja *pet osnovnih računskih zakonov*:

1. Zakon o zameni členov (*komutativnost* za seštevanje): vsota je komutativna, neodvisna od vrstnega reda členov

$$a+b=b+a$$

2. Zakon o združevanju členov (*asociativnost* za seštevanje): vsota je asociativna

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

3. Zakon o zameni faktorjev (*komutativnost* za množenje): produkt je komutativen, neodvisen od vrstnega reda faktorjev

$$ab=ba$$

4. Zakon o združevanju faktorjev (*asociativnost* za množenje):

$$(ab)c=a(bc)$$

5. Operaciji seštevanje in množenje povezuje razčlenitveni (*distributivnostni*) zakon:

$$(a+b)c=ac+bc$$

Definicija: *Naravno število, ki je deljivo le z 1 in s samim seboj, imenujemo praštevilo*.

Praštevila so po vrsti: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... itd. Število 1 ni praštevilo. Praštevil je neskončno mnogo.

Pri naravnih številih lahko nekatere trditve enostavno in efektno dokažemo z *aksiomom popolne indukcije,* ki pravi:
Če neka lastnost velja za prvo naravno število 1 *in ob predpostavki da velja za n, velja tudi za* $n+1$, *tedaj velja ta lastnost za vsa naravna števila.*

Primer:
Dokažimo, da za vsako naravno število velja tale formula za vsoto kvadratov

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<u>Rešitev:</u>
Napišimo zgornji izraz v obliki:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Za $n = 1$ je ta enačba izpolnjena: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)\ (2 \cdot 1 + 1)}{6} \Rightarrow 1 = 1$

Sedaj je potrebno še dokazati, da ob pogoju, da formula velja za *n*, velja tudi za $n+1$. Za $(n+1)$ zapišemo vsoto kvadratov

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Izraza na desni strani enačbe seštejejemo, preuredimo in dobimo

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Tročlenik na desni strani razstavimo $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ in ga zapišemo takole:

$$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3) = \ (n+1)+1 \ \cdot \ 2(n+1)+1$$

Na ta način dobimo

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\ \ (n+1)+1 \quad 2(n+1)+1}{6}$$

Ta zapis je identičen zapisu za *n*, če namesto *n* pišemo (*n*+1). Ker prvotni izraz velja za $n = 1$ in ob predpostavki, da velja za *n*, tudi za (*n*+1), velja torej za vsako naravno število *n*. S tem je trditev dokazana.

♦ ♦ ♦

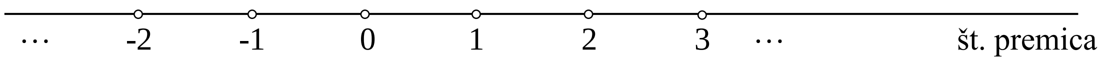
1.2.2 Cela števila

Cela števila dobimo tako, da naravnim številom dodamo število nič ter negativna števila $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Število 0 je rezultat odštevanja dveh enakih števil, negativno celo število $-x$, $x \in \boldsymbol{N}$ pa je število, za katerega velja: $(-x)+x=0$. Če pomeni $Z^{+}=N$

množico pozitivnih celih števil in Z^{-} množico negativnih celih števil, lahko zapišemo množico celih števil kot unijo množic Z^{+}, Z^{-} in množice z enim elementom – številom 0, torej: $Z=Z^{-}\cup\{0\}\cup Z^{+}$.

V množici celih števil je poleg računskih operacij seštevanja in množenja vedno izvedljiva tudi računska operacija odštevanje.

Števila ***upodabljamo*** s točkami na ***številski premici***. Na premici izberemo poljubno točko, ki naj predstavlja število 0. Desno od te točke izberemo poljubno točko, ki predstavlja število 1. Daljica, ki veže ti točki, pomeni enoto, to je razdaljo med dvema sosednjima celima številoma. To pomeni, da to daljico nanašamo na številsko premico od točke 1 dalje v desno in dobimo točke, ki predstavljajo števila 2, 3 itd. Če pa daljico nanašamo po premici od točke 0 v levo, dobimo nove točke, ki predstavljajo negativna števila $-1, -2, -3, -4, \ldots$ (slika 7).



Slika 7: Grafični prikaz celih števil

1.2.3 Racionalna števila

Racionalna števila zapišemo v obliki *ulomkov* $\frac{a}{b}$, kjer sta *števec a* in *imenovalec b* poljubni celi števili, le imenovalec ne sme nikoli biti enak 0, torej

$$\boldsymbol{Q}=\left\{\ \frac{a}{b}\ \middle|\ a \in \boldsymbol{Z},\ b \in \boldsymbol{Z},\ \ b \neq 0\right\}$$

Ulomke uvedemo zato, da je poleg seštevanja, odštevanja in množenja, vedno izvedljiva tudi računska operacija *deljenje.*

Množica celih števil je podmnožica množice racionalnih števil. Vsako celo število moremo zapisati v obliki ulomka, v katerem je imenovalec enak 1, npr.:

$$3 = \frac{3}{1}, \quad 112 = \frac{112}{1}, \quad -2 = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = -\frac{2}{1} \quad \text{itd.}$$

Ulomke, ki imajo v imenovalcu potence števila 10, lahko zapišemo v obliki ***decimalnih števil,*** npr.:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1, \quad \frac{1}{100} = 0{,}01, \quad \frac{1}{1000} = 0{,}001, \quad \frac{29}{1000} = 29 \cdot \frac{1}{1000} = 29 \cdot 0{,}001 = 0{,}029 \quad \text{itd.}$$

Vrednost ulomka se ne spremeni, če števec in imenovalec pomnožimo (ali delimo) s poljubnim, od 0 različnim številom (*razširjanje* oz. *krajšanje* ulomkov).

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}, \quad m \neq 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}, \quad k \neq 0 \tag{1.14}$$

Ulomke lahko seštevamo in odštevamo le, če imajo enake imenovalce. Tedaj velja:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \tag{1.15}$$

Kadar imenovalci niso enaki, s pravilom (1.13) tvorimo *najmanjši skupni imenovalec* in nato seštevamo/odštevamo po pravilu (1.15).

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \tag{1.15a}$$

Računski operaciji množenje in deljenje ulomkov pa sta določeni takole:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{1.16}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad (c \neq 0) \tag{1.17}$$

<u>Primer:</u>

Poenostavimo izraz $\left(\frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y}\right) \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

Rešitev:

$$\left(\frac{x+y}{x}-\frac{2x}{x-y}\right)\cdot\frac{x-y}{x^2+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)-2x^2}{x(x-y)}\cdot\frac{x-y}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2-y^2-2x^2\right)(x-y)}{x(x-y)\left(x^2+y^2\right)}=\frac{-\left(x^2+y^2\right)(x-y)}{x(x-y)\left(x^2+y^2\right)}=-\frac{1}{x}$$

♦ ♦ ♦

Številska premica je z racionalnimi števili pokrita “skoraj v celoti”. Ko zasedemo točke številske premice z racionalnimi števili, ostanejo nekatera mesta še "prazna". Te točke torej

ne predstavljajo racionalnih števil. Vsem takšnim številom, ki niso racionalna, pravimo ***iracionalna števila*** - označimo jih Q'. Iracionalna števila so torej vsa tista števila, ki jih ne moremo zapisati v obliki ulomka (oz. v obliki končnega ali neskončnega periodičnega decimalnega števila). To so npr. $\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3},\ \pm\log 2,\ \pm e,\ \pm\pi,\ \ldots$

1.2.4 Realna števila

Realna števila dobimo tako, da racionalnim številom dodamo še vsa iracionalna števila. Torej velja $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}\cup\boldsymbol{Q}'$. Vsaka točka številske premice predstavlja natanko eno realno število. Realna števila pokrivajo vse točke na številski premici.

V množici realnih števil so osnovne računske operacije (seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje) neomejeno izvedljive.

Definicija: *Vzemimo poljubno realno število a in poljubno naravno število n, torej $a\in\boldsymbol{R}$ in $n\in\boldsymbol{N}$. Produkt*

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\ \cdots a}_{n-krat}=a^n$$

imenujemo **potenca** *z osnovo a in potenčnim eksponentom n.*

Potenčni eksponent je lahko tudi negativen ali enak 0. Potenca je tedaj za $a\neq 0$ definirana tako:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad,\qquad a^0=1 \tag{1.18}$$

<u>Definicija</u>: *Vzemimo poljubno nenegativno realno število a in poljubno naravno število n, torej* $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$. *Potenci* $a^{\frac{1}{n}}$ *pravimo n-ti* ***koren*** *števila a in zapišemo* $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. *Število a se imenuje radikand, število n pa korenski eksponent ali stopnja korena.*

Potenco, kjer je ekponent racionalno število, zapišemo v obliki korena:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad , \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} , \quad a \neq 0 \tag{1.19}$$

Za računanje s potencami pri poljubnih realnih eksponentih veljajo pravila:

$$a^m\, a^n = a^{m+n} \tag{1.20}$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{1.21}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\,n} \tag{1.22}$$

$$\left(ab\right)^n = a^n\, b^n \tag{1.23}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{1.24}$$

<u>Primer:</u>

Poenostavimo izraz $\left(a^2\, b^{-3}\, c\right) : \dfrac{a^{-2}\, b\, c}{a\, b^{-3}\, c^{-2}}$.

<u>Rešitev:</u>

$$\left(a^2 b^{-3} c\right) : \frac{a^{-2} bc}{ab^{-3} c^{-2}} = a^2 b^{-3} c\, \frac{ab^{-3} c^{-2}}{a^{-2} bc} = \frac{a^2 b^{-3} c a b^{-3} c^{-2}}{a^{-2} bc} = \frac{a^2 c a a^2}{b^3 b^3 c^2 bc} = \frac{a^5}{b^7 c^2}$$

♦ ♦ ♦

<u>Primer:</u>

Skrčimo izraz $\sqrt{a^2 bc^{-1}} : \sqrt[3]{a^{-1} b^{-2} c^3} : \sqrt[6]{a^2 bc^{-3}}$

<u>Rešitev:</u>

S koreni računamo podobno, kot s potencami:

$$\sqrt{a^2bc^{-1}} : \sqrt[3]{a^{-1}b^{-2}c^3} : \sqrt[6]{a^2bc^{-3}} = \frac{\sqrt{a^2bc^{-1}}}{\sqrt[3]{a^{-1}b^{-2}c^3}\,\sqrt[6]{a^2bc^{-3}}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{\left(a^2bc^{-1}\right)^3}{\left(a^{-1}b^{-2}c^3\right)^2\,\left(a^2bc^{-3}\right)}} = \sqrt[6]{\frac{a^6b^3c^{-3}}{a^{-2}b^{-4}c^6a^2bc^{-3}}} = \sqrt[6]{a^6b^6c^{-6}} = abc^{-1} = \frac{ab}{c}$$

♦ ♦ ♦

Primer:

Skrčimo izraz $3\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2\sqrt[4]{a^2a^{\frac{3}{2}}}$.

Rešitev:

$$3\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2\sqrt[4]{a^2a^{\frac{3}{2}}} = 3\sqrt[8]{a^4a^2a} - 2\sqrt[4]{a^2\sqrt{a^3}} = 3\sqrt[8]{a^7} - 2\sqrt[8]{a^4a^3} = \sqrt[8]{a^7}$$

♦ ♦ ♦

Definicija: ***Logaritem*** *števila b,* $b \in \boldsymbol{R}$, $b > 0$, *pri osnovi a,* $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, *je eksponent, s katerim je treba osnovo a potencirati, da dobimo število b. Logaritem zapišemo v obliki* $x = \log_a b$ *(preberemo: "x je logaritem števila b pri osnovi a"). Številu b pravimo logaritmand.*

Po definiciji je torej $x = \log_a b$ rešitev enačbe $a^x = b$, kar zapišemo tudi

$$a^{\log_a b} = b \tag{1.25}$$

Pri računanju z logaritmi veljajo pravila:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \tag{1.26}$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \tag{1.27}$$

$$\log_a b^n = n\log_a b \tag{1.28}$$

Uporaba logaritmov torej množenje prevede v seštevanje, deljenje v odštevanje in potenciranje v (eno) množenje. Zaradi teh lastnosti so bili včasih logaritmi neprecenljiv pripomoček pri praktičnem numeričnem računanju, npr. v fiziki, astronomiji. Z razvojem računalnikov pa so ta pomen izgubili.

Ko je osnova logaritmov število deset ($a = 10$), govorimo o ***desetiških*** logaritmih. Pri desetiškem logaritmu osnove ne pišemo: $\log_{10} b = \log b$. Ko je osnova logaritmov enaka številu $e \approx 2{,}718$, govorimo o ***naravnih*** logaritmih, ki jih pišemo z znakom $\ln b$, torej $\log_e b = \ln b$.

Primer:

Logaritmirajmo izraz $x = \sqrt[6]{\dfrac{2a^3b^2}{\sqrt[4]{c^{-2}}}}$.

Rešitev:
Uporabimo pravila (1.26) – (1.28) in zapišemo

$$\log x = \log \sqrt[6]{\frac{2a^3b^2}{\sqrt[4]{c^{-3}}}} = \frac{1}{6}\log\frac{2a^3b^2}{\sqrt[4]{c^{-3}}} = \frac{1}{6}\left(\log\left(2a^3b^2\right) - \log\left(\sqrt[4]{c^{-3}}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left[\log 2 + 3\log a + 2\log b - \left(-\frac{3}{4}\right)\log c\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[\log 2 + 3\log a + 2\log b + \frac{3}{4}\log c\right]$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Rešimo enačbe:

a) $x = \log_4 64$

b) $\log_8 x = -\dfrac{1}{3}$

c) $\log_x \dfrac{1}{27} = 3$

Rešitev:
Vse tri logaritemske enačbe rešimo tako, da upoštevamo definicijo logaritma, torej enakovrednost zapisov: $x = \log_a b$ in $a^x = b$.

a) $x = \log_4 64$

$4^x = 64$

$4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$

b) $\log_8 x = -\dfrac{1}{3}$

$x = 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\log_x \dfrac{1}{27} = 3$

$$x^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

♦ ♦ ♦

<u>Definicija:</u> ***Absolutna vrednost realnega števila*** *je določena z izrazom*

$$|\,a\,| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

Torej je $|\,a\,| \geq 0$ za vsako realno število a. Absolutna vrednost realnega števila geometrično pomeni *razdaljo* od točke, ki predstavlja dano število, do točke, ki predstavlja število 0 na številski premici.

<u>Primer:</u>
Števili $-2{,}5$ in $+2{,}5$ sta od točke 0 enako oddaljeni, zato je $|-2{,}5| = |2{,}5| = 2{,}5$.

♦ ♦ ♦

<u>Definicija</u>*:* ***Intervali*** *so podmnožice realnih števil. Ločimo naslednje tipe intervalov:*

- *zaprti interval* $[a,b] = \{x | x \in R,\, a \leq x \leq b\}$
- *odprti interval* $(a,b) = \{x | x \in R,\, a < x < b\}$
- *delno zaprti interval* $[a,b) = \{x | x \in R,\, a \leq x < b\}$

  ali $(a,b] = \{x | x \in R,\, a < x \leq b\}$

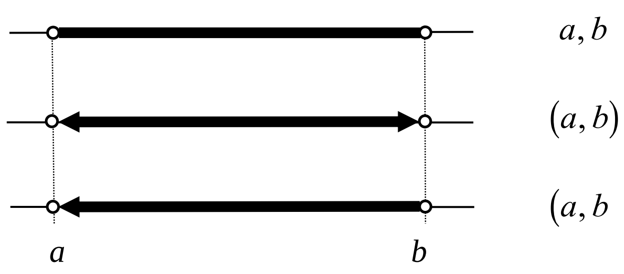
Število a je spodnja, število b pa zgornja meja intervala. Razlika $b-a$ je dolžina intervala.

<u>Grafično:</u>

zaprti interval:

odprti interval:

delno zaprti interval:



Primer:
Rešimo neenačbo $|\,x-1\,| \leq 2$, $(x \in R)$.

Rešitev:
Po definiciji (1.29) velja

$$|\,x-1\,| = \begin{cases} x-1 & \text{za} \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{za} \quad x-1 < 0 \end{cases}$$

Neenačba, ki jo rešujemo, zaradi tega razpade na dva sistema neenačb:

I. $x-1 \leq 2$, $x-1 \geq 0$ II. $-(x-1) \leq 2$, $x-1 < 0$

Rešitev prvega sistema so vsa realna števila, ki so hkrati manjša ali enaka 3 ter večja ali enaka 1, torej $1 \leq x \leq 3$ (ali $x \in \ 1, 3\ $).
Rešitev drugega sistema so vsa realna števila, ki so hkrati manjša ali enaka 1 ter večja ali enaka -1, to je $-1 \leq x < 1$ (ali $x \in \ -1, 1)$).

Rešitev začetne neenačbe so vsa tista realna števila, ki so na prvem ali na drugem intervalu. Iskana rešitev so vsa realna števila iz unije obeh intervalov $-1, 1) \cup \ 1, 3\ = \ -1, 3\$, torej $x \in \ -1, 3\$.
♦ ♦ ♦

Definicija: *Naj bo a poljubno realno število* $(a \in R)$, ε *pa poljubno majhno pozitivno realno število* $(\varepsilon \in R^{+})$. *Odprti interval* $(a-\varepsilon, \ a+\varepsilon)$ *imenujemo* $\varepsilon -$ ***okolica števila a***.
Grafični prikaz je dan na sliki 8.

Slika 8: $\varepsilon -$ okolica realnega števila a

Vsa realna števila, ki pripadajo $\varepsilon -$ okolici števila a, zadoščajo neenačbi $|\,x-a\,| < \varepsilon$.

Primer:
Na številski premici narišimo $\varepsilon -$ okolico števila 3, če je $\varepsilon = 0{,}05$.

Rešitev:
0,05 - okolica števila 3 je odprti interval $(2{,}95 \ , \ 3{,}05)$. Vsa realna števila x, ki pripadajo temu intervalu, ustrezajo neenačbi $|\,x-3\,| < 0{,}05$.

Grafično:

♦ ♦ ♦

Realna števila lahko zapisujemo v različnih ***številskih sistemih***. V vsakdanjem življenju uporabljamo *desetiški* ali decimalni sistem, kjer operiramo z desetimi ciframi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9. Če označimo cifre levo od decimalne vejice z znaki c_i , $0 \le c_i \le 9$, desno od decimalne vejice pa z znaki c_{-i} , $0 \le c_{-i} \le 9$, $i \in \boldsymbol{N}$, lahko realno število *a* zapišemo v obliki

$$a = c_n c_{n-1} \cdots c_1 c_0 \, \boldsymbol{,} \, c_{-1} c_{-2} \cdots \tag{1.30}$$

Število $c_n \; c_{n-1} \cdots c_1 \; c_0$ predstavlja *celi del* števila *a*, cifre c_{-1} , c_{-2} , $\cdots$ pa so *decimalke*, ki tvorijo decimalni del števila.

Ker je *osnova* decimalnega sistema število 10, pomeni zapis števila (1.30) naslednje:

$$\begin{aligned} a &= c_n \; c_{n-1} \cdots c_1 \; c_0 \;\boldsymbol{,}\; c_{-1} \; c_{-2} \cdots = \\ &= c_n \; 10^n + c_{n-1} \; 10^{n-1} + \cdots + c_1 \; 10^1 + c_0 \; 10^0 + \\ &\quad + c_{-1} \; 10^{-1} + c_{-2} \; 10^{-2} + c_{-3} \; 10^{-3} + \cdots \end{aligned} \tag{1.31}$$

Primer:
Število 12369,875 v desetiškem sistemu pomeni

$$12369{,}875 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$$

♦ ♦ ♦

Številski sistemi so lahko različni. *Dvojiški* (*binarni*) sistem ima osnovo 2 in uporablja le dve cifri 0 in 1, *trojiški* sistem ima osnovo 3 in ima na razpolago tri cifre 0, 1 in 2 itd...

Primer:
Število 99 v desetiškem sistemu napišemo v dvojiškem sistemu s ciframa 0 in 1 in s potencami števila 2:

$$99_{(10)} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1100011_{(2)}$$

♦ ♦ ♦

Primer:

Število $34\frac{4}{9}$ v desetiškem sistemu zapišemo v trojiškem sistemu s ciframi 0, 1 in 2:

$$34\frac{4}{9}_{(10)}=1\cdot 3^3+0\cdot 3^2+2\cdot 3^1+1\cdot 3^0+1\cdot 3^{-1}+1\cdot 3^{-2}=1021{,}11_{(3)}$$

♦ ♦ ♦

1.2.5 Kompleksna števila

V množici realnih števil sicer lahko uporabljamo vse osnovne računske operacije, zaplete pa se že pri rešitvi preproste enačbe $x^2+1=0$, ki jo lahko zapišemo tudi v obliki $x^2=-1$. Kvadrat poljubnega realnega števila je vedno pozitivno število, torej ne obstaja nobeno tako realno število, katerega kvadrat je število -1. To pomanjkljivost odpravimo s tem, da definiramo število *i*, ki ga imenujemo *imaginarna enota.* Imaginarna enota je torej rešitev enačbe $x^2+1=0$, zato velja $i^2=-1$.

Definicija: *Kompleksno število α je urejen par realnih števil $\alpha=(a,b)$, $a,b\in R$, kar običajno pišemo v obliki: $\alpha=a+bi$. Pri tem je i imaginarna enota.*
Realnemu številu a pravimo realna komponenta, realnemu številu b pa imaginarna komponenta kompleksnega števila.

Opomba: Kompleksna števila pri uporabi v tehniki velikokrat označimo tudi takole: $z=x+iy$.

Definicija: *Kompleksnemu številu $\alpha=a+bi$ lahko priredimo* ***konjugirano kompleksno število*** *$\overline{\alpha}$ (včasih tudi α^*), ki se od prvotnega kompleksnega števila razlikuje le v predznaku imaginarne komponente: $\overline{\alpha}=a-bi$.*

Primer:
Zapišimo konjugirana kompleksna števila naslednjim kompleksnim številom: $\alpha=2+4i$, $\beta=3-2i$, $\gamma=-1-5i$, $\delta=-5+2i$.

Rešitev:
Po definiciji konjugirano kompleksnega števila velja:
$\alpha=2-4i$, $\beta=3+2i$, $\gamma=-1+5i$, $\delta=-5-2i$.
♦ ♦ ♦

S kompleksnimi števili seveda tudi računamo. Osnovne računske operacije izvajamo podobno, kot pri računanju z dvočleniki, pri čemer upoštevamo - ko je potrebno - da je $i^2=-1$.

Naj bosta $\alpha = a + bi$ in $\beta = c + di$ dve kompleksni števili. Osnovne računske operacije so definirane takole:

- seštevanje, odštevanje:

$$\alpha \pm \beta = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i \tag{1.32}$$

- množenje:

$$\alpha\ \beta = (a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \tag{1.33}$$

Pomnožimo kompleksno število $\alpha = a + bi$ z njemu prirejenim konjugiranim kompleksnim številom $\alpha = a - bi$.

$$\alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Vidimo, da je takšen produkt vedno realno število:

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = a^2 + b^2 \in R \tag{1.34}$$

- deljenje nam omogoča lastnost (1.34):

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\,\bar{\beta}}{\beta\,\bar{\beta}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i, \quad \beta \neq 0 \qquad (1.34)$$

<u>Primer:</u>
Dani sta kompleksni števili $\alpha = 2 - 3i$ in $\beta = 3 - 5i$. Izračunajmo vsoto, razliko, produkt in kvocient teh dveh števil!

<u>Rešitev:</u>

$$\alpha + \beta = (2 - 3i) + (3 - 5i) = 5 - 8i$$

$$\alpha - \beta = (2 - 3i) - (3 - 5i) = -1 + 2i$$

$$\alpha\ \beta = (2 - 3i)\,(3 - 5i) = 6 - 19i + 15i^2 = -9 - 19i$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 - 3i}{3 - 5i} = \frac{2 - 3i}{3 - 5i} \cdot \frac{3 + 5i}{3 + 5i} = \frac{6 + i - 15i^2}{9 - 25i^2} = \frac{21 + i}{34} = \frac{21}{34} + \frac{1}{34} i$$

♦ ♦ ♦

Za potence imaginarne enote je mogoče ugotoviti zanimivo in predvsem uporabno lastnost. Zapišimo nekaj potenc:

$$
\begin{aligned}
i^1 &= i\\
i^2 &= -1\\
i^3 &= i^2 \cdot i = -i\\
i^4 &= i^3 \cdot i = 1\\
i^5 &= i^4 \cdot i = i\\
i^6 &= i^5 \cdot i = -1\\
i^7 &= i^6 \cdot i = -i\\
i^8 &= i^7 \cdot i = 1\\
i^9 &= i^8 \cdot i = i\\
i^{10} &= i^9 \cdot i = -1\\
i^{11} &= i^{10} \cdot i = -i\\
i^{12} &= i^{11} \cdot i = 1\\
&\dots\\
&\dots
\end{aligned}
$$

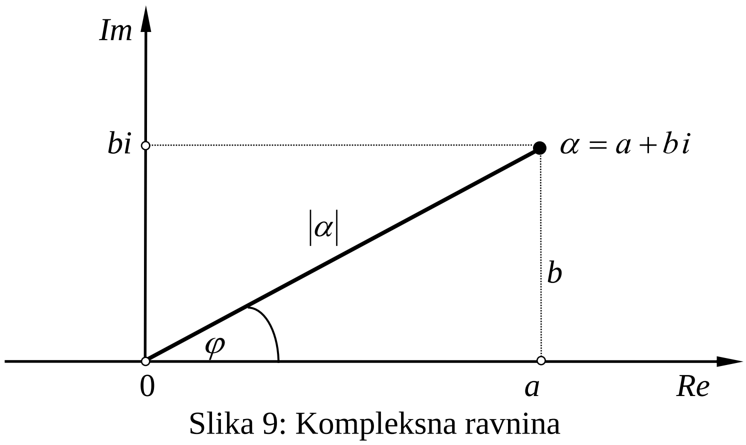
Splošno velja:

$$i^{4k} = 1,\ k \in N$$

Ko je potenčni eksponent n poljubno naravno število, ga lahko zapišemo v obliki $n = 4k + m$, kjer je $k \in N$, m pa lahko zavzame vrednosti 0, 1, 2 ali 3.
Od tod sledi formula za potenco imaginarne enote:

$$i^n = i^{4k+m} = i^m$$

Kompleksna števila rišemo v ***kompleksni (Gaussovi) ravnini***.
Na vodoravni osi odmerimo velikost realne komponente *a*, na navpični osi pa odmerimo velikost imaginarne komponente *b*. Kompleksno število $\alpha = a + bi$ je točka na ravnini (slika 9).



Slika 9: Kompleksna ravnina

Definicija: ***Absolutna vrednost kompleksnega števila*** α *(označimo jo z* $|\alpha|$*) je dolžina daljice, ki veže koordinatno izhodišče ter točko v ravnini, ki predstavlja dano kompleksno število. Iz slike 9 vidimo, da je*

$$|\,\alpha\,| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha\,\overline{\alpha}} \tag{1.36}$$

Primer:

Pokažimo, da za poljubno kompleksno število $\alpha \in C$ velja: $|\,\alpha\,|^2 = \alpha\,\overline{\alpha}$.

Rešitev:

Če pišemo kompleksno število v obliki $\alpha = a + bi$, je leva stran zgornje relacije

$$|\,\alpha\,|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

in desna stran

$$\alpha\,\overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Leva in desna stran relacije sta enaki, torej res velja $|\,\alpha\,|^2 = \alpha\,\overline{\alpha}$.

♦ ♦ ♦

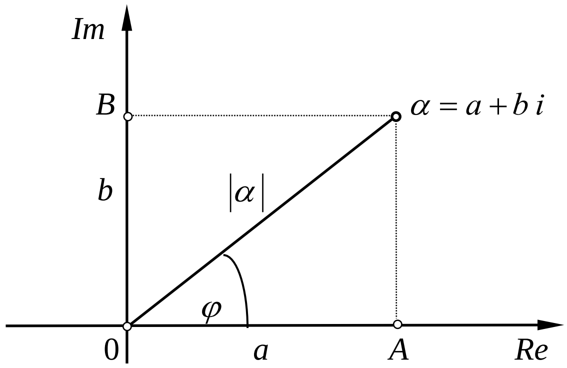
Kompleksna števila lahko zapišemo tudi v ***polarni*** ali ***trigonometrični obliki****:*

$$\alpha = |\,\alpha\,|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.37}$$

Formulo (1.37) dobimo, ko upoštevamo (glej sliko 10) zvezi:

$$\overline{0A} = a = |\,\alpha\,|\cos\varphi \quad \text{in} \quad \overline{0B} = b = |\,\alpha\,|\sin\varphi$$

Kot φ dobimo iz zveze: $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$.

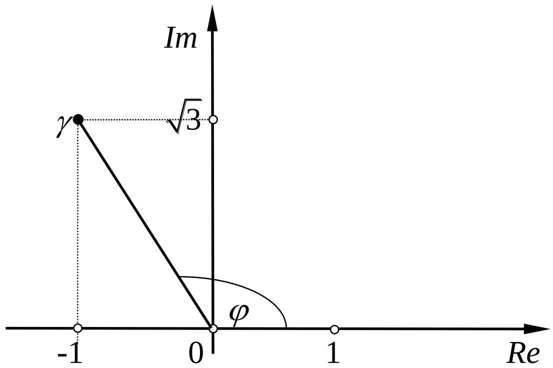


Slika 10: Kompleksno število $\alpha = a + b\,i$ v kompleksni ravnini

Primer:
Zapišimo kompleksno število $\gamma = -1 + i\sqrt{3}$ v polarni obliki.

Rešitev:
Kompleksno število bomo zapisali v obliki $\gamma = |\,\gamma\,|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, zato potrebujemo velikost tega števila in kot φ. Tangens kota je negativen: $tg\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, torej je kot v drugem ali četrtem kvadrantu. Iz slike 11 vidimo, da je kot v drugem kvadrantu, torej je $\varphi = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$. Ker je $|\,\gamma\,| = +\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, je polarni zapis danega kompleksnega števila

$$\gamma = |\,\gamma\,|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$



Slika 11: Kompleksno število $\gamma = -1 + i\sqrt{3}$

♦ ♦ ♦

Potenco in koren kompleksnega števila računamo po ***Moivrovih[2] formulah***

$$\alpha^n = \left(|\alpha|\right)^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right),\ n \in \boldsymbol{N} \tag{1.39}$$

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{|\,\alpha\,|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\,\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \tag{1.40}$$

<u>Primer:</u> Izračunajmo α^{10}, če je $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

<u>Rešitev:</u>

Zaradi $|\alpha| = 2$ in $tg\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$, dobimo po formuli (1.39)

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right) = 1024(-0{,}5 - 0{,}866i) = -512 - 886{,}8i$$

♦ ♦ ♦

<u>Primer:</u> Rešimo enačbo $z^3 - 2\left(1 + i\sqrt{3}\right) = 0$, kjer je z kompleksno število, $z \in \boldsymbol{C}$.

<u>Rešitev:</u>

Zgornjo enačbo lahko zapišemo v obliki $z = \sqrt[3]{2\left(1 + i\sqrt{3}\right)}$. Tretji koren bomo dobili s pomočjo formule (1.40) za k = 0, 1 in 2:

$$\sqrt[3]{\alpha} = \sqrt[3]{|\,\alpha\,|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\,\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right)$$

Z α smo označili kompleksno število pod tretjim korenom, torej $\alpha = 2\left(1 + i\sqrt{3}\right)$. Potrebujemo $|\alpha|$ in kot φ:

$$|\alpha| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4\ ,\quad tg\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,.$$

Kompleksno število $\alpha = 2\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ leži v prvem kvadrantu, zato je $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Od tod so rešitve:

- za k = 0:

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\pi/3\frac{(\pi/3) + 2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{(\pi/3) + 2\pi\cdot 0}{3}\right) == \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right) \approx 1{,}492 + 0{,}543i$$

---

[2] Abraham de Moivre (1667 – 1754), francoski matematik

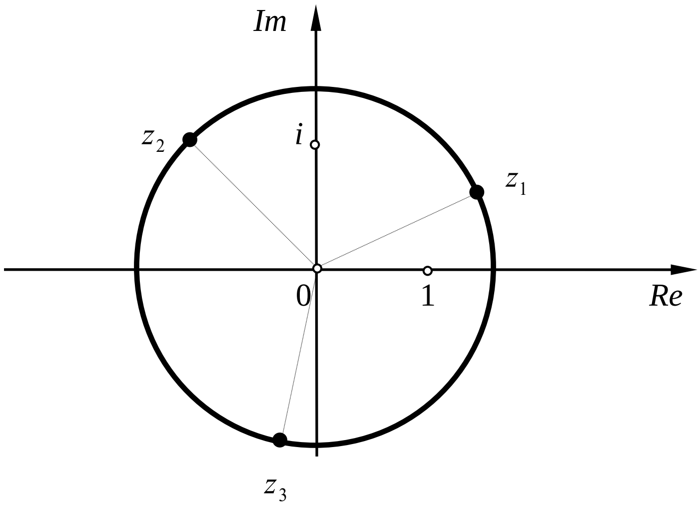
- za $k = 1$:

$$z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right) \approx -1{,}216 + 1{,}020\, i$$

- za $k = 2$:

$$z_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right) \approx -0{,}276 - 1{,}563\, i$$

Absolutne vrednosti vseh treh kompleksnih števil so med seboj enake: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$. To pomeni, da so rešitve enačbe takšna kompleksna števila, ki leže na krožnici s polmerom $r \approx 1{,}587$ (slika 12).



Slika 12: Koreni enačbe $z^3 - 2\left(1 + i\sqrt{3}\right) = 0$

♦ ♦ ♦

1.3 Upodabljanje množic

Naj bosta dani množici *A* in *B*. Če poznamo neko pravilo, po katerem pripada vsakemu elementu iz množice *A* natanko določen element iz množice *B*, pravimo, da smo množico *A* s tem pravilom *upodobili* v množico *B*.

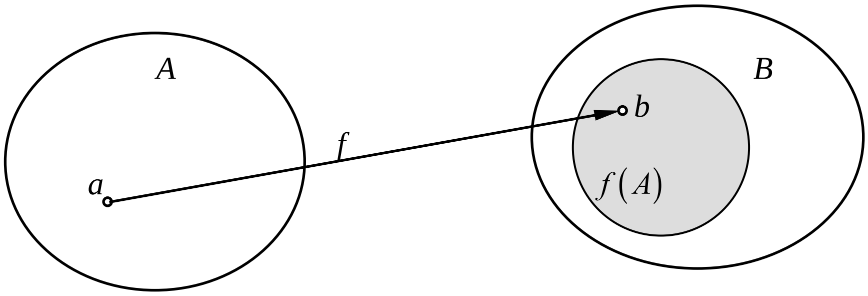
<u>Definicija</u>: ***Upodobitev*** *(preslikava) množice A v množico B je pravilo, ki vsakemu elementu a prve množice priredi neki element b druge množice.*

Upodobitve običajno označimo s črkami f, g, u, ... in zapišemo na razne načine:

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{ali} \quad f: \ A \to B \quad \text{ali} \quad a \to f(a) \ , \quad a \in A \ , \ f(a) \in B$$

Elementu $a \in A$, ki ga preslikavamo, pravimo ***original***, elementu $b \in B$, ki ustreza elementu *a*, pa pravimo ***slika*** elementa *a* in ga označimo $b = f(a)$. Množico *A* imenujemo ***definicijsko območje*** upodobitve f. V množici *B* niso vedno vsi elementi slike elementov množice *A*. Tisti elementi množice *B*, ki so slike elementov množice *A*, tvorijo neko podmnožico množice *B*, ki jo imenujemo ***zaloga vrednosti*** upodobitve *f*. Zalogo vrednosti označimo $f(A)$.

Grafični prikaz je na sliki 13.



Slika 13: Upodobitev množice *A* v množico *B*

Množici *A* in *B* se lahko tudi ujemata. Ko je $B = A$, je slika $f(a)$ spet element množice *A*. V tem primeru pravimo, da smo množico *A* *upodobili vase*.

<u>Primer:</u>
Četrta potenca naravnega števila je vedno naravno število. Če torej vsakemu naravnemu številu n priredimo njegovo četrto potenco n^4, smo upodobili množico naravnih števil vase.
♦ ♦ ♦

<u>Definicija</u>: *Preslikava* $f: \ A \to B$ *je*

1. ***injektivna****, če se različni elementi množice A vselej preslikajo v različne elemente množice B, torej če je* $f(a_1) = f(a_2)$ *le za* $a_1 = a_2$,
2. ***surjektivna****, če je vsak element* $b \in B$ *slika vsaj enega elementa* $a \in A$*, torej je* $f(A) = B$,
3. ***bijektivna*** *(povratno enolična), če je hkrati injektivna in surjektivna.*

Primer:
Množica A (zaloga vrednosti) naj bo množica realnih števil, množica B pa naj bo množica točk na številski premici. Upodobitev f je preslikava vsakega realnega števila v neko točko na številski premici. Različni realni števili imata za sliko različni točki na številski premici, zato je preslikava injektivna. Preslikava je tudi surjektivna, saj je vsaka točka na številski premici slika nekega realnega števila. Ker je preslikava hkrati injektivna in surjektivna, je tudi bijektivna.
♦ ♦ ♦

Vzemimo množici A in B ter $f:\ A \to B$ neko bijektivno preslikavo med njima. Tedaj lahko vpeljemo še pojem povratne ali inverzne preslikave.

Definicija: *Preslikavo $B \to A$, ki vsakemu elementu $b \in B$ priredi element $a \in A$, za katerega je $b = f(a)$, imenujemo* ***povratna*** *ali* ***inverzna*** *preslikava preslikave f. Povratno preslikavo označimo f^{-1}.*

$$f:\ A \to B,\ \ B = f(A)$$
$$f^{-1}:\ B \to A,\ \ A = f^{-1}(B)$$

Pri povratni preslikavi $f^{-1}:\ B \to A$ dobimo iz slik $b = f(a)$ originale $a = f^{-1}(b)$.

Primer: Zapišimo inverzne funkcije naslednjih funkcij:
a) $y = f(x) = 2x - 3$, b) $y = f(x) = \log_5 x$, c) $y = f(x) = \sin 2x$.

Rešitev:
Pri inverzni preslikavi $f^{-1}:\ Y \to X$ preidejo slike elementov v svoje originale. Inverzno funkcijo f^{-1} torej dobimo, ko zamenjamo vlogi množic X in Y, kar za naš primer pomeni:

a) $y = f(x) = 2x - 3 \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{2}$

b) $y = f(x) = \log_5 x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = 5^y$

c) $y = f(x) = \sin 2x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \dfrac{\arcsin y}{2}$

♦ ♦ ♦

Definicija: *Če med množicama A in B obstoja povratno enolična preslikava, imenujemo ti dve množici* ***ekvipolentni****.*

Definicija: *Množica, ki je ekvipolentna množici naravnih števil, se imenuje* ***števna množica.***

Definicija: *Preslikavo neke množice točk na premici (množica A) v množico realnih števil (množica B) imenujemo **realna funkcija**.*

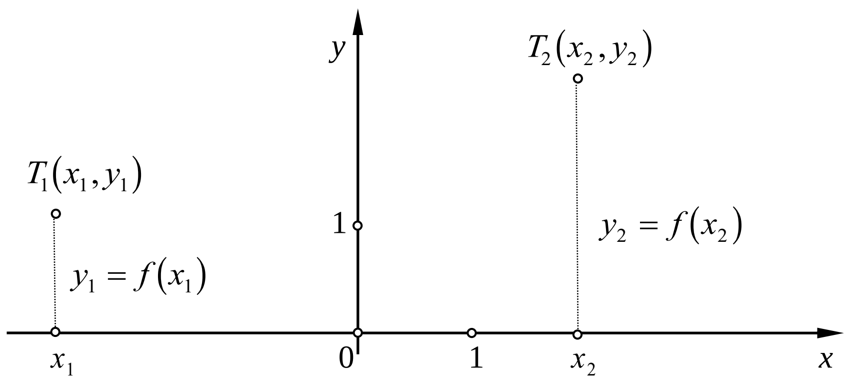
Vsaka premica je tudi številska premica, tako da je vsaka točka na njej slika nekega realnega števila. Zato smemo nadomestiti množico točk na številski premici z množico ustreznih realnih števil in obratno, vsako množico realnih števil imamo lahko za množico točk na premici.

Za množici *A* in *B* realnih števil smemo vzeti premici, ki ju postavimo pravokotno eno na drugo tako, da se sekata v točki 0 na obeh premicah. Premici še orientiramo tako, da je točka 1 na vodoravni premici desno od točke 0, na navpični premici pa nad točko 0.

S tem sta na obeh oseh določeni tudi enoti (slika 14). Na ta način smo dobili ***pravokotni koordinatni sistem v ravnini***. Množici *A* dajmo ime *X*, množici *B* pa *Y*.

Preslikava $f: X \to Y$ tedaj določa množico parov $\{(x, f(x)) \mid x \in X,\ f(x) \in Y\}$, ki jih imenujemo ***graf funkcije f***. Elementom $x \in X$ pravimo ***neodvisne spremenljivke***, elementom $y = f(x) \in Y$ pa ***odvisne spremenljivke***.

Par $(x, y = f(x))$ določa točko v koordinatnem sistemu. Vrednost *x* imenujemo ***abscisa***, vrednost *y* pa ***ordinata*** točke.



Slika 14: Pravokotni koordinatni sistem v ravnini

Primer:

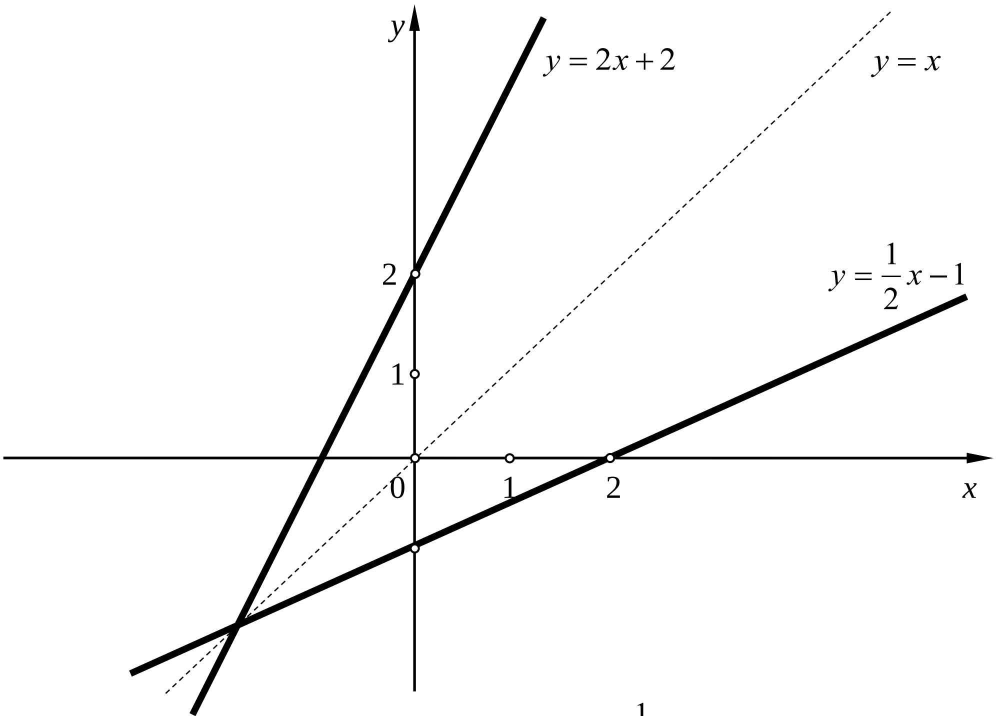
Narišimo funkcijo $y = 0{,}5x - 1$ in njeno inverzno (obratno) funkcijo.

Rešitev:

Geometrijsko ponazarja funkcijo in njen inverzum ista krivulja, če nanašamo vrednosti neodvisne spremenljivke prvič na osi *x*, drugič pa na osi *y*. Pri geometrijskem upodabljanju funkcij pa smo navajeni, da je vrednost neodvisne spremenljivke vedno abscisa, vrednost funkcije pa ordinata točke v koordinatnem sistemu. Zato običajno v enačbi inverzne funkcije spremenljivki zamenjamo in zapišemo inverzno funkcijo v obliki $y = f^{-1}(x)$. Geometrijsko pomeni takšna zamenjava spremenljivk zrcaljenje koordinatne ravnine preko simetrale I. in III. kvadranta. *Slika funkcije in njene inverzne funkcije sta simetrični glede na premico* $y = x$.

V funkciji $y = \frac{1}{2}x - 1$ zamenjajmo vlogi spremenljivk, torej $x = \frac{1}{2}y - 1$ in od tod $y = 2x + 2$. Funkciji $y = \frac{1}{2}x - 1$ inverzna funkcija je torej funkcija $y = 2x + 2$.

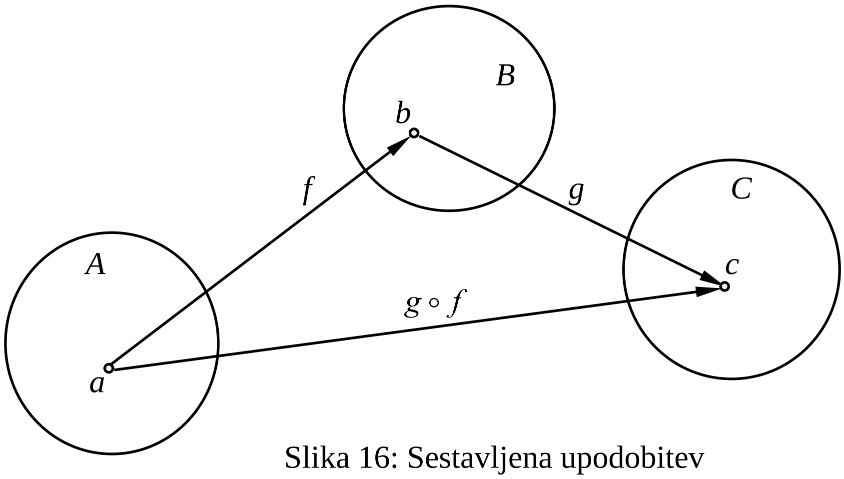
Še grafično:



Slika 15: Grafa funkcije $y = \frac{1}{2}x - 1$ in $y = 2x + 2$

♦ ♦ ♦

Vzemimo sedaj tri množice *A*, *B* in *C* in naj bo *f* upodobitev množice *A* v množico *B*, *g* pa upodobitev množice *B* v množico *C*. Sliko elementa $a \in A$, to je $b = f(a) \in B$ lahko preslikamo v element $c = g(b) \in C$. Na ta način pripada vsakemu elementu množice *A* natanko določen element množice *C*, kar pomeni, da smo množico *A* preslikali v množico *C* (slika 16).



Slika 16: Sestavljena upodobitev

Primer:
Vzemimo funkciji $f(x) = 3x - 2$ in $g(x) = 2x + 5$. Obe funkciji sta definirani za vsak realen *x*, zato obstajata tudi ***sestavljeni*** ali ***posredni*** (*indirektni*) funkciji $F_1 = g \circ f$ in $F_2 = f \circ g$, ki se glasita

$$F_1 = g \circ f = g(f(x)) = 2f(x) + 5 = 2\,(3x - 2) + 5 = 6x + 1$$

in

$$F_2 = f \circ g = f(g(x)) = 3g(x) - 2 = 3(2x + 5) - 2 = 6x + 13$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Dani sta funkciji $f(x) = -x^2 - x + 1$ ter $g(x) = 2x + 3$. Zapišimo posredni funkciji $F_1 = g \circ f$ in $F_2 = f \circ g$.
Rešitev:

$$F_1 = g \circ f = g(f(x)) = 2f(x) + 3 = 2\,(-x^2 - x + 1) + 3 = -2x^2 - 2x + 5$$

$$F_2 = f \circ g = f(g(x)) = -(g(x))^2 - g(x) + 1 = -(2x + 3)^2 - (2x + 3) + 1 =$$
$$= -4x^2 - 14x - 11$$

♦ ♦ ♦

Iz zgornjih primerov opazimo, da komponiranje funkcij ni komutativna operacija, torej v splošnem $g \circ f \neq f \circ g$.

Naloge

1. V pravokotnem koordinatnem sistemu narišite množice:

$$A=\{(x,y) \mid\ -1\le x\le 2,\ -2\le y\le 2\}$$

$$B=\{(x,y)\ \mid\ x^2+y^2\le 16\}$$

$$C=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2<9,\ \ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\ge 1\right\}$$

2. Pokažite, da za poljubne množice A, B in C veljata zvezi:

$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$$

$$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

4. Naj bosta dani množici $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}\}$ in $B=\{b_1,b_2,b_3,a_4,a_5,a_6\}$.
Preverite, če je izpolnjena enačba $m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B)$.

4. Preverite veljavnost relacij:

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$

$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

5. Pokažite, da je razlika dveh celih števil deljiva z dve, če je z dve deljiva njuna vsota!

6. Rešite neenačbo (zapiši množico rešitev): $|\,x+3\,|>1,\ \ x\in\boldsymbol{R}$.

7. Rešite neenačbo: $|\,|\,x\,|+1\,|\le 3,\ \ x\in\boldsymbol{R}$.

8. S popolno indukcijo dokažite pravilnost tehle trditev (obrazcev, formul):

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

9. Izračunajte:

a) $\displaystyle\frac{x^2-2xy-4y^2}{x^5-16xy^4}-\frac{x-2y}{x^4+4x^2y^2}$

b) $\dfrac{3a+b}{3a^2-ab}-\dfrac{2a+3b}{12ab-4b^2}+\dfrac{3a^2-ab-6b^2}{18a^2b-6ab^2}$

10. Izračunajte:

a) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{2n+1}\cdot\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{n+1}\cdot\left(\dfrac{1}{x+y}\right)^{n-1}$

b) $0{,}1^{-2}-(-0{,}2)^{-3}+(-0{,}5)^{-4}+0{,}25^{-3}$

c) $\left(\dfrac{2x^2m^3}{3yn^3}\right)^3:\left(\dfrac{5y^2n}{6xm^2}\right)^2:\left(\dfrac{4}{3}x^2y^{-2}\right)^4$

11. Izračunajte:

a) $\sqrt{a^2bc^{-1}}:\sqrt[3]{a^{-1}b^{-2}c^3}:\sqrt[6]{a^2bc^{-3}}$

b) $\sqrt{\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}}:\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}$

12. Rešite enačbe:

a) $\left(u-\dfrac{1}{2}\right)\left(u+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{5}{16}=0$

b) $\left(1+\sqrt{1-x}\right)^{-1}+\left(1-\sqrt{1-x}\right)^{-1}=\dfrac{2}{9}x$

c) $\left(\dfrac{8+w}{4-w}\right)^2-8\left(\dfrac{8+w}{4-w}\right)+15=0$

13. Rešite enačbe:

a) $7^{x+5}=1$

b) $5^{2x+1}-13^{4x+2}=0$

c) $2^{x+2}-3\cdot2^{x-1}=5^{x+1}-4\cdot5^x-3\cdot5^{x-1}$

14. Rešite enačbe:

a) $2^{3x-4}\cdot2^{x+2}=5^x$

b) $3^{3x+2}-7^{2x+1}=3^{3x-2}-7^{2x-1}$

c) $\sqrt[5]{2^{x+1}}-\sqrt[4]{3^{2x-1}}=0$

15. Rešite enačbe:

a) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{1-x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+2}$

b) $4^{\sqrt{x}}=2^{x+1}$

c) $\log\left(x+\sqrt{2}\right)+\log\left(x-\sqrt{2}\right)=\log x+\log(x-1)$

d) $\log(a+1)-\log(2a-1)=-\log 3$

16. Rešite enačbe:
    a) $\log(2a+3)+\log 5a-2\log(3-a)=1$
    b) $11^{\log x}-\sqrt{1{,}04139^3}=0$
    c) $1+\log 5=\log 8+\log 2^x-\log(2^x-3)$

17. Rešite enačbe:
    a) $\sin^2\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$
    b) $\cos^2\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$
    c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-1$
    d) $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$

18. Okrajšajte ulomek: $\frac{x^3-5x^2-4x+20}{x^4-5x^3-8x+40}$

19. Okrajšajte ulomek: $\frac{2y^4-y^3-16y+8}{2y^3-3y^2-3y+2}$

20. Rešite neenačbe:
    a) $x<|x|$
    b) $|x+1|-3<|x-2|$
    c) $|2x+3|\le|4x-3|$

21. V kompleksni ravnini narišite množico točk, ki ustreza pogoju:
    a) $|\alpha|\le 2$ b) $|\alpha|=2$ c) $1\le|\alpha|<2$

22. Izračunajte: $\frac{2-3i}{10}+\frac{-1+2i}{2(4+3i)}-\frac{5+i}{3-4i}$.

23. Izračunajte:
    a) $\sqrt{2-3i}$ b) $\sqrt{5+12i}$

24. Dokažite, da je izraz $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$ realno število, če sta α in β kompleksni števili z lastnostjo: $|\alpha|=|\beta|=1$ ter $\alpha\beta\neq-1$.

25. Kompleksni števili $\alpha=1+i$ in $\beta=-1-i$ zapišite v polarni obliki!

26. Rešite enačbe $(z\in\mathbb{C})$:
    a) $z^4+64=0$

b) $z^6 = (1-i)$
c) $z^4 + 5 = 0$

27. Izračunajte:
a) $i^{110} + i^{245} + i^{200}$
b) $(1+i)^{100}$
c) $i^{1000} + i^{2001} + (-1-i)^{20}$

28. Danim funkcijam poiščite inverzne funkcije:

a) $y = 2x$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = \dfrac{1}{x-1}$

d) $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ e) $y = e^{2x+1}$ f) $y = \log(x+1)$

29. Dani sta funkciji $f_1(x) = x^2 + 1$ ter $f_2(x) = -x + 5$. Zapišite posredni funkciji $f_1 \circ f_2$ in $f_2 \circ f_1$!

30. Dani sta funkciji $f(x) = \sqrt{x}$ ter $g(x) = x + 1$. Zapišite posredni funkciji $F_1 = g \circ f$ in $F_2 = f \circ g$!

Rešitve

5. $a + b = 2k, \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z},\ k - b \in \mathbb{Z}$
$a - b = a + b - 2b = 2k - 2b = 2\,(k-b)$

6. $(-\infty,-4) \cup (-2,\infty)$ oz. $\mathbb{R} \setminus\ -4,-2$

7. $-2, 0\,) \cup\ 0, 2\ =\ -2, 2$

9. a) $-\dfrac{8y^3}{x^2\left(x^4 - 16y^4\right)}$ b) $\dfrac{25}{12}(3a-b)^{-1}$

10. a) $\dfrac{x+y}{(x-y)^n}$ b) 305 c) $\dfrac{27}{200}\,y m^{13} n^{-11}$

11. a) abc^{-1} b) 1

12. a) $u_{1,2} = \pm\dfrac{3}{4}$ b) $x_{1,2} = \pm 3$ c) $w_1 = 1,\ w_2 = 2$

13. a) $7^{x+5} = 7^0 \Rightarrow x+5=0 \Rightarrow x=-5$ b) $x=-\frac{1}{2}$ c) $x=2$

14. a) $2^{4x-2} = 5^x \Rightarrow (4x-2)\log 2 = x\log 5 \Rightarrow x = \dfrac{2\log 2}{4\log 2 - \log 5} \approx 1{,}192$

b) 0,435 c) 1,006

15. a) $x=4$ b) $x=1$ c) $x=2$ d) $a=2$

16. a) $a=\frac{5}{6}$ b) $x=1{,}06$ c) $x=1{,}836$

17. a) $x_1 = (2k+1)\dfrac{3\pi}{4}, \quad x_2 = (6k+5)\dfrac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $x=\dfrac{k\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z}$ c) $x=(2k-1)\dfrac{\pi}{6}, \quad k\in\mathbb{Z}$

d) $\log_{\cos x}\sin x = a \Rightarrow (\cos x)^a = \sin x$

$\log_{\sin x}\cos x = b \Rightarrow (\sin x)^b = \cos x$

Vstavimo 1. enačbo v drugo: $\left((\cos x)^a\right)^b = \cos x \Rightarrow ab=1$. To je ena enačba za neznana a in b. Drugo enačbo dobimo iz začetne enačbe $a+b=2$.

Od tod: $a=1,\ b=1$, zato je

$\log_{\cos x}\sin x = 1 \Rightarrow (\cos x)^1 = \sin x$

$\log_{\sin x}\cos x = 1 \Rightarrow (\sin x)^1 = \cos x$

Iz obeh enačb dobimo: $\sin x = \cos x$.

Ker $\sin x$ in $\cos x$ nastopata v logaritmu, mora biti rešitev enačbe $\sin x = \cos x$ samo pozitivna: $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}^+$.

18. $\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}$

19. $\dfrac{y^2+2y+4}{y+1}$

20. a) $-\infty < x < 0$ (rešitev je lahko zapisana tudi v obliki $x\in(-\infty,0)$)

b) $x\in(-\infty,2)$ c) $x\in(-\infty, 0 \cup 3,\infty)$

22. $\dfrac{-1-5i}{5} = -\dfrac{1}{5}-i$

23. a) $\sqrt{2-3i} = \begin{cases} +\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}} \\ -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}} \end{cases}$ b) $\alpha_1 = 3+2i$, $\alpha_2 = -3-2i$

25. $\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\beta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

26. a) $z_1 = 2+2i$, $z_2 = -2+2i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = 2-2i$

b) $z_k = \sqrt[12]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3}\right)\right]$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $z_k = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

27. Nekatere zaporedne potence imaginarne enote so:

a) $i^{110} = i^{4\cdot 27+2} = i^2 = -1$, $i^{245} = i^{4\cdot 61+1} = i$, $i^{200} = i^{4\cdot 50} = 1$

$\Rightarrow i^{110} + i^{245} + i^{200} = i$

b) $2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) = -2^{50} \approx 1{,}1259.10^{15}$ c) $-1023+i$

28. a) $y = \frac{x}{2}$ b) $y^2 = x+1$ c) $y = \frac{x+1}{x}$

d) $y = \frac{3x-1}{x-2}$ e) $y = \frac{1}{2}(\ln x - 1)$ f) $y = 10^x - 1$

29. $f_1 \circ f_2 = f_1(f_2(x)) = x^2 - 10x + 26$ $f_2 \circ f_1 = f_2(f_1(x)) = -x^2 + 4$

30. $f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{x+1}$ $g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{x} + 1$

2 RAČUNSKE TEHNIKE

2.1 Razmerja in sorazmerja

Razmerje definiramo kot *nakazano deljenje* števila a s številom b. Števili a in b, ki ju imenujemo ***člena*** razmerja, sta sicer lahko poljubni realni števili, zaradi kasnejših vsebinskih razlogov (predvsem pri pri obrestnem računu) pa bomo zahtevali, naj bosta obe števili pozitivni: $a, b \in \boldsymbol{R}^+$. Postavimo še dodatno omejitev: $b \neq 0$.

Razmerje označimo $a{:}b$ ali tudi kot ulomek $\frac{a}{b}$.

Nakazano deljenje smemo izvesti - tedaj dobimo ***količnik*** ali ***kvocient*** razmerja:

$$a{:}b = \frac{a}{b} = k \tag{2.01}$$

Dve razmerji sta enaki, kadar imata enak količnik. Če izenačimo dve enaki razmerji, na primer $a:b = k$ in $c:d = k$, dobimo ***enostavno sorazmerje***

$$a{:}b = c{:}d \tag{2.02}$$

Številoma a in d v tem zapisu pravimo zunanja člena, številoma b in c pa notranja člena sorazmerja.

<u>Primer:</u>
Razmerji $10:5$ in $66:33$ imata količnik 2, zato sta enakovredni (ekvivalentni) in tvorita sorazmerje

$$10:5 = 66:33$$

♦ ♦ ♦

Če izenačimo več enakih razmerij, na primer $a:d = k$, $b:e = k$ in $c:f = k$, dobimo ***razširjeno sorazmerje***

$$a:b:c = d:e:f \tag{2.03}$$

Primer:
Razmerja $10:5$, $66:33$ in $14:7$ imajo količnik 2, zato lahko iz njih sestavimo razširjeno razmerje $10:66:14 = 5:33:7$

♦ ♦ ♦

Zaradi definicij (2.01) in (2.02) veljajo za računanje z razmerji in sorazmerji takšna pravila, kot jih poznamo pri računanju z ulomki. Ta pravila so naslednja:

1. Oba člena poljubnega razmerja smemo množiti ali deliti z istim od nič različnim številom:

$$a:b = ma:mb\,,\quad m \neq 0 \qquad (2.04)$$

2. V poljubnem sorazmerju je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov.

$$a:b = c:d \Rightarrow ad = bc \qquad (2.05)$$

3. Sorazmerje se ne spremeni, če množimo ali delimo po en notranji in en zunanji člen z istim od nič različnim številom.

$$a:b = c:d \Rightarrow a:mb = c:md \text{ ali } ma:b = mc:d\,,\ m \neq 0$$

4. S členi sorazmerja smemo napraviti poljubno zamenjavo, pri kateri ostaneta produkta zunanjih oziroma notranjih členov nespremenjena.

$$a:b = c:d \Rightarrow d:b = c:a \text{ ali } c:a = d:b \text{ ali } b:d = a:c$$

5. Iz sorazmerja $a:b = c:d$ sledijo naslednje enačbe:

$$(a+b):(c+d) = a:c \qquad (2.06)$$
$$(a+b):(c+d) = b:d \qquad (2.07)$$
$$(a-b):(c-d) = a:c \qquad (2.08)$$
$$(a-b):(c-d) = b:d \qquad (2.09)$$

Prvo lastnost (2.04) ugotovimo tako, da razmerje pišemo kot ulomek in ga razširimo s poljubnim od nič različnim številom *m*.

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} \Rightarrow a:b = ma:mb\,,\quad m \neq 0$$

Drugo lastnost (2.05) dobimo podobno. Enačbo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ pomnožimo s skupnim imenovalcem bd in dobimo $ad = bc$. Če namesto enačbe z ulomki pišemo enostavno sorazmerje, res velja zapisano pravilo $a:b=c:d \Rightarrow ad=bc$. To pravilo, ki sorazmerje zapiše kot enačbo, uporabljamo v primerih, ko moramo izraziti enega od členov sorazmerja z ostalimi tremi. Tako iz $a:b=c:d$ dobimo $a=\frac{bc}{d}$, $b=\frac{ad}{c}$, $c=\frac{ad}{b}$ in $d=\frac{bc}{a}$.

Preverimo sedaj tretjo lastnost. V sorazmerju $a:b=c:d$ pomnožimo s številom $m \neq 0$ npr. zunanji člen *a* in notranji člen *c*, tako da dobimo sorazmerje $ma:b=mc:d$, od koder sledi $mad=mbc$. Ker je število *m* različno od nič ($m \neq 0$), lahko dobljeno enačbo z njim delimo in dobimo $ad=bc$, kar je enako kot v prvotnem sorazmerju. Sorazmerji $a:b=c:d$ in $ma:b=mc:d$ sta res enakovredni.

Vzemimo spet sorazmerje $a:b=c:d$, za katerega je $ad=bc$. Produkta se ne spremenita, če zapišemo npr. sorazmerje $b:d=a:c$ ali $b:a=d:c$ in podobno. Zaradi tretje lastnosti so ta sorazmerja enakovredna.

Preverimo še prvo enačbo (2.06) v petem pravilu. Sorazmerje $a:b=c:d$ smemo zaradi četrtega pravila zapisati tudi v obliki $b:a=d:c$. To sorazmerje zapišimo kot enačbo z ulomki, to je $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. Na obeh straneh te enačbe prištejemo število 1, tako da imamo $\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$, in dobljena izraza seštejmo

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

Dobljeno enačbo smemo zapisati kot sorazmerje $(a+b):a=(c+d):c$, kar pa zaradi četrtega pravila lahko res zapišemo v obliki $(a+b):(c+d)=a:c$.
Na podoben način ugotovimo tudi veljavnost preostalih treh enačb, ki še nastopajo v petem pravilu.

<u>Primer:</u> Poenostavimo razmerje $\frac{3}{10}:\frac{7}{15}$.

<u>Rešitev:</u>
Po prvem pravilu smemo oba člena razmerja pomnožiti s poljubnim (od nič različnim) številom. Dano razmerje bomo poenostavili tako, da se bomo „znebili" ulomkov, zato bomo oba člena pomnožili z najmanjšim skupnim imenovalcem, ki je v našem primeru število 30. Razmerje $\frac{3}{10}:\frac{7}{15}$ je torej enako razmerju $9:14$.

♦ ♦ ♦

Primer:
Krajšajmo razmerje $210 : 150$.

Rešitev:
Oba člena zaporedja delimo najprej z 2, nato s 3 in še s 5, pa dobimo

$$210 : 150 = 105 : 75 = 35 : 25 = 7 : 5$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Preverimo, če je sorazmerje $2\frac{1}{10} : 3\frac{3}{20} = 1\frac{1}{20} : 1\frac{23}{40}$ pravilno.

Rešitev:
Sorazmerje bo pravilno, če bo produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov.
V tem primeru je produkt zunanjih členov $2\frac{1}{10} \cdot 1\frac{23}{40} = \frac{21}{10} \cdot \frac{63}{40} = \frac{1323}{400}$, produkt notranjih členov pa je $3\frac{3}{20} \cdot 1\frac{1}{20} = \frac{63}{20} \cdot \frac{21}{20} = \frac{1323}{400}$. Produkta sta enaka, zato sorazmerje velja.
Dano sorazmerje pa lahko še poenostavimo tako, da ga zapišemo z naravnimi števili. V ta namen sorazmerje najprej zapišemo z ulomki, nato pa vse člene pomnožimo z najmanjšim skupnim imenovalcem 40:

$$2\frac{1}{10} : 3\frac{3}{20} = 1\frac{1}{20} : 1\frac{23}{40}$$
$$\frac{21}{10} : \frac{63}{20} = \frac{21}{20} : \frac{63}{40}$$

$$84 : 126 = 42 : 63$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Iz sorazmerja $x : 3 = 4 : 6$ določimo neznano število *x*.

Rešitev:
V sorazmerju je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov, zato je

$$6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Preuredimo sorazmerje $(10 - x) : x = 3 : 2$ tako, da bo neznani *x* nastopal samo v enem členu.

Rešitev:
Upoštevali bomo drugo enačbo v 5. pravilu $(a+b):(c+d)=b:d$. To enačbo smemo zapisati tudi v obliki $(a+b):b=(c+d):d$.
Če v danem sorazmerju $(10-x):x=3:2$ označimo $a=10-x$, $b=x$, $c=3$ in $d=2$, bomo iz zgornje formule dobili $(10-x+x):x=(3+2):2$ in od tod $10:x=5:2$.

Izračunajmo za preizkus neznanko *x* iz obeh sorazmerij.
Iz prvotnega sorazmerja $(10-x):x=3:2$ dobimo

$$(10-x)\cdot 2=3x$$
$$20-2x=3x \Rightarrow x=4$$

Iz preoblikovanega sorazmerja pa sledi

$$10:x=5:2$$
$$5x=20 \Rightarrow x=4$$

Neznani *x* je seveda v obeh primerih enak.
♦ ♦ ♦

Primer:
Sorazmerji $a:b=1:2$ in $b:c=3:9$ zapišimo v obliki razširjenega razmerja.

Rešitev:
Na razpolago imamo dve enačbi, pa tri neznanke, zato bomo morali za eno neznanko izbrati neko vrednost. Vzemimo npr., da je kar $a=1$. Sedaj iz prvega sorazmerja lahko izrazimo *b*.
Iz enačbe $1\cdot b=2\cdot a$ dobimo $b=2$.
Z znanim *b* gremo v drugo sorazmerje, od koder izračunamo še tretjo neznanko $c=\frac{9b}{3}=\frac{9\cdot 2}{3}=6$.
Po definiciji (2.03) dobimo iskano razširjeno sorazmerje $a:b:c=1:2:6$. Ker velja $a=1\cdot k$, $b=2\cdot k$ in $c=6\cdot k$ za vse $k\in \boldsymbol{R}^+$, je razširjenih sorazmerij, ki ustrezajo podatkom iz tega primera, neskončno mnogo:

- za $k=1$ imamo sorazmerje $a:b:c=1:2:6$,
- za $k=2$ je sorazmerje $a:b:c=2:4:12$,
- za $k=3$ je sorazmerje $a:b:c=3:6:18$,
- za $k=\frac{1}{2}$ je sorazmerje $a:b:c=\frac{1}{2}:1:3$,
- za $k=\frac{2}{3}$ je sorazmerje $a:b:c=\frac{2}{3}:\frac{4}{3}:4$
- itd...

Iz primerjave zapisanih razširjenih sorazmerij vidimo, da smemo člene na desni strani pomnožiti (ali deliti) s poljubnim od nič različnim številom.

♦ ♦ ♦

Primer:

Zapišimo razširjeno sorazmerje $a:b:c = \frac{3}{5} : 1\frac{7}{10} : 2\frac{4}{15}$ samo z naravnimi števili.

Rešitev:

V sorazmerju bomo najprej odpravili mešana števila, tako da dobimo $a:b:c = \frac{3}{5} : \frac{17}{10} : \frac{34}{15}$, nato pa bomo člene na desni strani pomnožili z najmanjšim skupnim imenovalcem 30.

Rešitev se torej glasi $a:b:c = 18:51:68$.

♦ ♦ ♦

Razmerja in sorazmerja so v praksi zelo pogosta oblika izražanja medsebojnih zvez med količinami (spremenljivkami). Za konkretne praktične primere sta pomembni zlasti dve možnosti: ***premo*** in ***obratno*** sorazmerje.

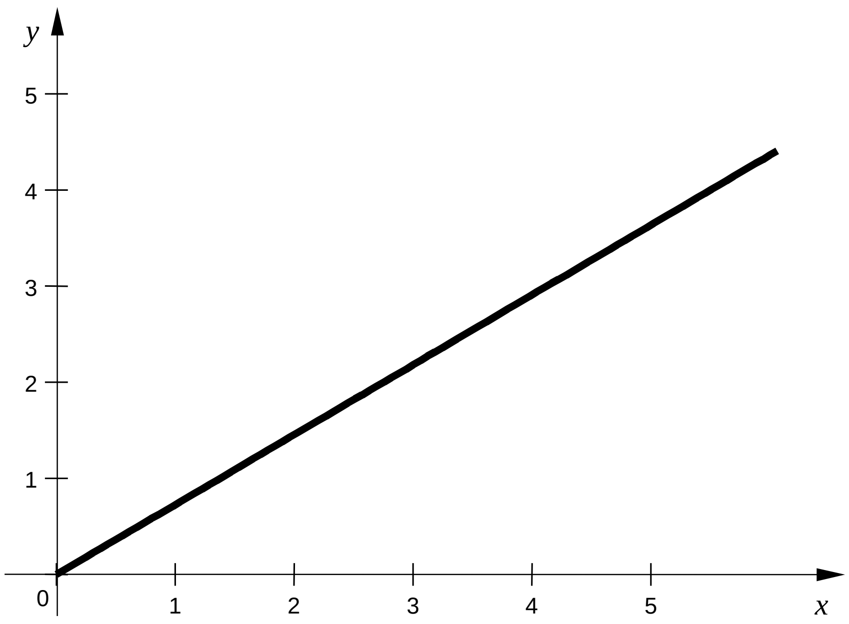
Oglejmo si najprej premo sorazmerje. Opazujmo odnos med dvema spremenljivima količinama, imenujmo ju splošno kar *x* in *y*.

Definicija: *Spremenljivki x in y sta **premo sorazmerni**, kadar velja enačba*

$$y = kx,\ \ k \in \mathbf{R}^{+} \tag{2.10}$$

Konstanta k se imenuje sorazmernostni faktor premega sorazmerja.

Grafično si premo sorazmerje predstavimo s premico v prvem kvadrantu pravokotnega koordinatnega sistema, kjer na vodoravni osi odmerjamo spremenljivko *x*, na navpični osi pa iz relacije (2.10) dobimo spremenljivko *y* (slika 17). Pri praktičnih primerih namreč upoštevamo samo prvi kvadrant, ker so količine, s katerimi operiramo v praksi, vedno pozitivne (masa, dolžina, cena, čas, plača, ...). Iz tega razloga smo v (2.01) tudi zahtevali, da naj bo sorazmernostni faktor premega sorazmerja pozitivno število.



Slika 17: Grafični prikaz premega sorazmerja

Osnovna značilnost premega sorazmerja je naslednja: če eno spremenljivko dvakrat, trikrat, štirikrat, ... povečamo (zmanjšamo), se dvakrat, trikrat, štirikrat, ... poveča (zmanjša) tudi druga spremenljivka.

Naj spremenljivka *x* zavzame vrednosti:

$$x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_3 = 3x_1,\ x_4 = 4x_1,\ \ldots,\ x_n = nx_1,\ \ldots.$$

Ustrezne vrednosti druge (premo sorazmerne) spremenljivke so zaradi (2.10):

$$y_1 = kx_1,\ y_2 = kx_2 = k \cdot 2x_1 = 2 \cdot kx_1 = 2y_1,\ \ y_3 = kx_3 = 3y_1,\ \ldots, y_n = kx_n = ny_1, \ldots.$$

Zapišimo te povezave v tabeli.

x	**y**
x_1	y_1
$2x_1$	$2y_1$
$3x_1$	$3y_1$
$\ldots$	$\ldots$
nx_1	ny_1
$\ldots$	$\ldots$

Za poljubno premo sorazmerje lahko iz $y_1 = kx_1$ zapišemo $k = \frac{y_1}{x_1}$, iz $y_2 = kx_2$ pa $k = \frac{y_2}{x_2}$. Ker gre za isto premo sorazmerje, je *k* v obeh izrazih enak, zato velja tudi

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \tag{2.11}$$

Izraz (2.11) pa smemo zapisati v obliki sorazmerja $y_1 : x_1 = y_2 : x_2$ oziroma

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \tag{2.12}$$

Primer:
Za 5 kg blaga smo plačali 200,00 d.e. Koliko bi nas stalo 30 kg istega blaga?

Rešitev:
V nalogi imamo opravka z dvema spremenljivkama: količina blaga *x* in zneskom *y*. Spremenljivki sta seveda premo sorazmerni - več (manj) blaga nabavimo, več (manj) moramo plačati.
Označimo: $x_1 = 5\,\text{kg}$, $x_2 = 30\,\text{kg}$, $y_1 = 200{,}00\,\text{d.e.}$
Iz formule (2.12) dobimo

$$y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1} = \frac{30 \cdot 200{,}00\ d.e.}{5} = 1.200{,}00\ \text{d.e.}$$

♦ ♦ ♦

Če primerjamo več premo sorazmernih količin, dobimo ***razširjeno premo sorazmerje***

$$x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_n = y_1 : y_2 : y_3 : \cdots : y_n \tag{2.13}$$

Primer:
V nekem podjetju je razmerje med plačo direktorja in poslovne tajnice $6 : 1$, razmerje med plačo poslovne tajnice in delavca v proizvodnji pa je $2{,}4 : 1{,}3$. Izračunajmo razširjeno sorazmerje vseh treh plač in plačo direktorja ter poslovne tajnice, če je plača delavca 600 EUR.

Rešitev:
Označimo s p_1 plačo direktorja, s p_2 plačo poslovne tajnice, p_3 pa naj pomeni plačo delavca v proizvodnji. Iz podatkov razberemo $p_1 : p_2 = 6 : 1$, $p_2 : p_3 = 2{,}4 : 1{,}3$ in $p_3 = 600{,}00$ EUR.

Iz drugega sorazmerja dobimo $p_2 = \frac{2,4 \cdot p_3}{1,3} = 1.107,70$ EUR, iz prvega sorazmerja pa sledi $p_1 = \frac{6p_2}{1} = 6.646,20$ EUR. Plača poslovne tajnice je 1.107,70 EUR, plača direktorja pa 6.646,20 EUR.

Razširjeno razmerje plač je

$$p_1 : p_2 : p_3 = 6.646,20 : 1.107,70 : 600,00$$

Delimo člene desne strani s 600 in dobimo lepši zapis iskanega sorazmerja

$$p_1 : p_2 : p_3 = 11,08 : 1,84 : 1,00$$

♦ ♦ ♦

Sedaj si oglejmo še obratno sorazmerje.

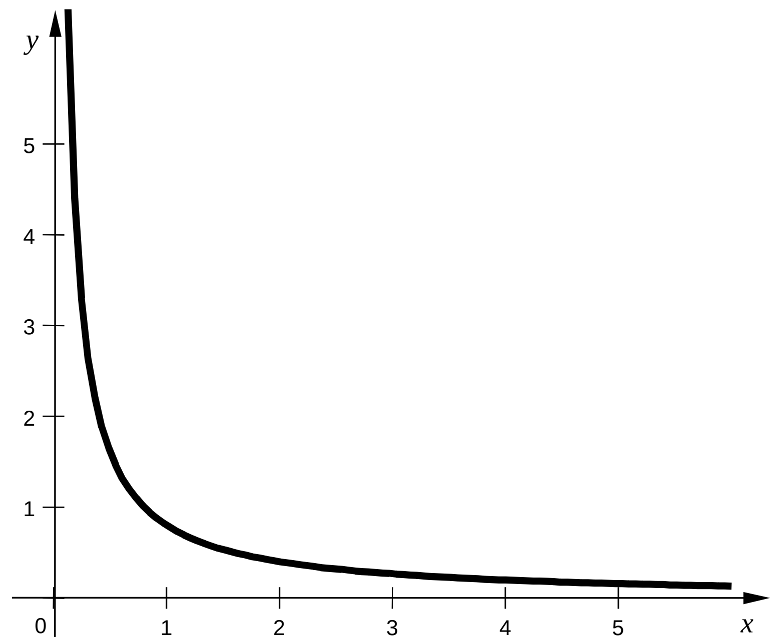
<u>Definicija</u>: *Spremenljivki x in y sta* ***obratno sorazmerni****, kadar velja enačba*

$$y = \frac{k}{x}, \quad k \in \boldsymbol{R}^+ \tag{2.14}$$

Konstanta k se imenuje sorazmernostni faktor obratnega sorazmerja.

Osnovna značilnost obratnega sorazmerja je naslednja: če eno spremenljivko dvakrat, trikrat, štirikrat, ... povečamo (zmanjšamo), se druga spremenljivka dvakrat, trikrat, štirikrat, ... zmanjša (poveča).
Drugače rečeno: ko se ena spremenljivka poveča za dvakrat, bo druga spremenljivka dosegla polovico prvotne vrednosti; ko se ena spremenljivka poveča za trikrat, bo druga spremenljivka dosegla eno tretjino prvotne vrednosti itd..

Graf:



Slika 18: Grafični prikaz obratnega sorazmerja

Naj spremenljivka x zavzame vrednosti $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots,$ z lastnostmi $x_2 = 2x_1,\ x_3 = 3x_1,\ \dots,\ x_n = nx_1,\ \dots.$

Ustrezne vrednosti druge (premo sorazmerne) spremenljivke so zaradi (2.13) naslednje:

$$y_1 = \frac{k}{x_1},\quad y_2 = \frac{k}{x_2} = \frac{k}{2x_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{x_1} = \frac{1}{2}y_1,\quad y_3 = \frac{k}{x_3} = \frac{1}{3}y_1,\ \cdots,\quad y_n = \frac{k}{x_n} = \frac{1}{n}y_1,\ \dots.$$

Zapišimo to dejstvo v tabeli:

x	**y**
x_1	y_1
$2x_1$	$\frac{y_1}{2}$
$3x_1$	$\frac{y_1}{3}$
$\dots$	$\cdots$
nx_1	$\frac{y_1}{n}$
$\dots$	$\cdots$

Za poljubno obratno sorazmerje lahko iz relacije $y_1 = \frac{k}{x_1}$ zapišemo $k = x_1 y_1$, iz $y_2 = \frac{k}{x_2}$ pa $k = x_2 y_2$. Ker gre za isto premo sorazmerje, je *k* v obeh izrazih enak, zato velja tudi

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 \tag{2.15}$$

Izraz (2.15) pa smemo zapisati tudi v obliki sorazmerja

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1 \tag{2.16}$$

Primer:
10 delavcev opravi neko delo v 15 urah. Koliko časa bi za isto delo potrebovalo 8 delavcev?

Rešitev:
V nalogi imamo dve spremenljivki (število delavcev *x* in ure potrebnega dela *y*), ki sta obratno sorazmerni - manj kot je delavcev, več časa potrebujejo za dokončanje dela (in obratno).
Označimo: $x_1 = 10$ delavcev, $x_2 = 8$ delavcev, $y_1 = 15$ ur. Iz formule (2.15) dobimo

$$y_2 = \frac{x_1 y_1}{x_2} = \frac{10 \cdot 15}{8} \text{ ur} = 18{,}75 \text{ ur}$$

Za to delo bi 8 delavcev potrebovalo 18.75 ur.
♦ ♦ ♦

Primer:
Na kmetiji imajo 60 krav. Zanje so pripravili hrano za 30 dni. Po 10 dneh bodo dobili 40 novih krav, tako da jih bodo imeli skupno 100. Za koliko dni jim bodo od tedaj naprej še zadoščale zaloge?

Rešitev:
V nalogi imamo dve spremenljivki, število krav in število dni, ko traja nabavljena zaloga hrane.
Spremenljivki sta obratno sorazmerni - več kot je krav, manj dni traja zaloga hrane (in obratno). Po definiciji (2.15) je pri obratnem sorazmerju konstanten produkt obeh spremenljivk. Produkt $60 \cdot 30$ pomeni število dni, ko bi hrana zadoščala za eno kravo oziroma skupno razpoložljivo količino hrane. V prvih desetih dneh so za 60 krav na kmetiji že porabili $60 \cdot 10$ enot hrane, preostalo hrano, to je razliko $60 \cdot 30 - 60 \cdot 10 = 60 \cdot (30 - 10)$ pa bodo lahko uporabili za hranjenje 100 krav v naslednjih *x* dneh. Od to sledi enačba $60 \cdot (30 - 10) = 100 \cdot x$, ki je ekvivalentna sorazmerju

$$(30 - 10) : x = 100 : 60 \Rightarrow x = 12$$

Rešitev $x = 12$ pomeni, da bo od dneva, ko je bilo nabavljenih novih 40 krav, preostale hrane za vse krave dovolj le še za 12 dni. Če na kmetiji ne bi dobili novih krav, bi bilo hrane seveda še za 20 dni.
♦ ♦ ♦

2.2 Sklepni račun

Sklepni račun je postopek, pri katerem izračunamo neko neznano količino iz skupine drugih količin, ki so z njo v premem ali obratnem sorazmerju. Uporabo sklepnega računa pokažimo kar na dveh primerih - en primer naj bo za premo in en primer za obratno sorazmerje.

Primer:
10 tovornjakov je v 3 dneh prepeljalo v 4 vožnjah na dan 300 t blaga. Koliko blaga bi prepeljalo 6 tovornjakov v 7 dneh v 5 vožnjah na dan?

Rešitev:
V nalogi imamo opravka s štirimi količinami (število tovornjakov, število dni, število voženj, količina blaga). Neznanka je prepeljano blago v spremenjenih pogojih dela. Prepeljanega blaga bo več (manj), če bo vozilo več (manj) tovornjakov, če bodo vozili več (manj) dni in če bo vsak tovornjak opravil več (manj) voženj v enem dnevu. Vse količine so z iskano količino očitno v premem sorazmerju. Ker je količin več, gre za razširjeno premo sorazmerje. Sklepanje zapišemo v obliki preproste sheme, v kateri smemo vrstni red spremenljivk določiti poljubno.

Da nas ne bi zavedle konkretne številčno izražene količine iz naloge, je za razumevanje pravila sklepnega računa najbolje zapisati samo spremenljivke (tovornjaki, dnevi, število voženje na dan in prepeljano blago).

tovornjaki	dnevi	število voženj/dan	blago
			x

Premo sorazmerje bomo označili s puščico, obrnjeno navzgor, obratno pa s puščico, obrnjeno navzdol.
Primerjavo spremenljivk delamo vedno z iskano spremenljivko, v našem primeru torej s spremenljivko „blago”.
Potem sklepamo takole: **več blaga** (puščica navzgor pri blagu) bo prepeljalo **več tovornjakov** (puščica navzgor pri tovornjakih) v **več dneh** (puščica navzgor pri dnevih) in z **več vožnjami/dan** (puščica navzgor pri vožnjah).

tovornjaki	dnevi	vožnje/dan	blago
↑	↑	↑	↑
			x

V skicirano tabelo vpišemo sedaj še konkretne količine iz podatkov, danih v primeru:

tovornjaki	dnevi	vožnje/dan	blago
10 ↑	3 ↑	4 ↑	300 ↑
6	7	5	x

Sedaj velja pravilo, ki sledi direktno iz pojma sorazmerja oziroma razširjenega sorazmerja:

Neznana (iskana) količina x je dana v obliki ulomka, kjer so v števcu količina pri konici puščice pri neznani spremenljivki in vse ostale količine pri začetku puščic, v imenovalcu pa so vse ostale znane količine, zapisane pri koncеh puščic.

V danem primeru je torej takole:

$$x = \frac{6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 300}{10 \cdot 3 \cdot 4} = 525$$

Odgovor: prepeljali bodo 525 t blaga.

♦ ♦ ♦

Primer:

Neko delo opravijo 3 delavci v 5 dneh, če delajo po 12 ur na dan. Koliko delavcev bi bilo potrebno, da bi opravili to delo v 4 dneh, če bi delali po 9 ur na dan?

Rešitev:

Tule gre za za sestavljeno obratno sorazmerje, ker več delavcev opravi neko določeno delo v manj dneh in v krajšem delavniku. Ravnamo s podobnim razmislekom, kot v prejšnjem primeru in dobimo

delavci	dnevi	delavnik
3 ↑	5 ↓	12 ↓
x	4	9

Več delavcev (puščica gor) opravi neko delo v manj dneh (puščica dol) in v manj urah/dan (puščica dol).

$$x = \frac{3 \cdot 5 \cdot 12}{4 \cdot 9} = 5$$

V novih pogojih bi potrebovali 5 delavcev.

♦ ♦ ♦

2.3 Verižni račun

Ko v sklepnem računu nastopajo ***samo premo sorazmerne količine***, je zelo preprosta pot reševanja uporaba sheme v obliki *verige*. Postopek reševanja v takšni shemi imenujemo *verižni račun.* Verižni račun se uporablja predvsem pri reševanju nalog sklepnega računa, ko nastopajo različne merske ali denarne enote, za katere moramo seveda poznati ustrezne pretvornike.

Za sestavo verige je (zaradi lastnosti sestavljenega premega sorazmerja) potrebno upoštevati enostavna in jasna pravila:

- veriga je sestavljena iz dveh stolpcev,
- verigo začnemo z neznano količino,

- količina v levem stolpcu nove vrstice mora imeti enako mersko enoto kot količina v desnem stolpcu eno vrstico višje,
- zadnja količina (v zadnji vrstici desnega stolpca) mora imeti enako mersko enoto kot jo ima neznana količina na začetku verige,
- neznana količina se izraža kot ulomek, kjer so v števcu količine iz desnega stolpca, v imenovalcu pa količine iz levega stolpca.

Primer:
V New Yorku stane 3 yd nekega blaga toliko kot 35 lb moke. 10 lb moke stane 4 USD. Koliko stane 1 m blaga v EUR, če je 1 EUR = 1,2776 USD in 1 yd = 0,9144 m ?

Rešitev:
Z upoštevanjem lastnosti (pravil) verižnega računa dobimo takšno shemo (verigo):

x EUR	1 m (blaga)
0,9144 m	1 yd
3 yd (blaga)	35 lb (moke)
10 lb (moke)	4 USD
1,2776 USD	1 EUR

Od tod sledi:

$$x = \frac{1 \cdot 1 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 1}{0,9144 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 1,2776} = 3,99 \text{ EUR}$$

Odgovor: 1 m blaga stane 3,99 EUR.

♦ ♦ ♦

Verižni račun je uporaben zlasti v primerih, ko je potrebno obračunati dodatne stroške nakupa/prodaje.

Primer:
V Londonu stane 1 gl (galona) vina toliko kot 60 lb žita. 12 lb žita stane 0,60 GBP. Koliko stane 1 liter vina uvoznika v Sloveniji, če mora plačati še 30% skupnih stroškov? (Pretvorniki: 1 GBP = 1,188 EUR, 1 gl = 4,543 l).

Rešitev:

x EUR	1 l (vina)
4,534 l	1 gl (vina)
1 gl (vina)	60 lb (žita)
12 lb (žita)	0,60 GBP
1 GBP	1,188 EUR
100 EUR	130 EUR (skupno s stroški)

Od tod:

$$x = \frac{1 \cdot 1 \cdot 60 \cdot 0,60 \cdot 1,118,7997 \cdot 130}{4,534 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 100} = 1,02 \text{ EUR}$$

Odgovor: 1 liter vina stane uvoznika 1,02 EUR.
♦ ♦ ♦

2.4 Razdelilni račun

Razdelilni (pravimo lahko tudi *delitveni*) račun se ukvarja z naslednjim vprašanjem: neko količino (blaga, denarja, materiala, storitev, ...) moramo razdeliti na več delov, ki so med seboj najpogosteje predpisani v nekem (so)razmerju. Kako izpeljati takšno delitev, da bo zadoščeno predpisanemu odnosu?

Označimo količino, ki jo bomo razdelili, z znakom *A*. To količino želimo razdeliti na *n* delov, tako da so posamezni deli v razmerju $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$. Velikosti posameznih delov označimo z $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $n \geq 2$. Seveda je vsota vseh delov enaka celotni količini: $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = A$.

Pri delitvi nastopata dve možnosti:

1. možnost:

Deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so *premo sorazmerni* številom $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tedaj velja

$$y_i = k\, x_i \quad \text{za vse} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Zaradi $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = A$ je $kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_n = A$.

Od tod

$$k = \frac{A}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

in posamezni deli

$$y_i = \frac{A}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \cdot x_i \quad \text{za vse} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.17}$$

2. možnost:

Deli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so *obratno sorazmerni* številom $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tedaj velja

$$y_i = \frac{k}{x_i} \quad \text{za vse} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Enačbo $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = A$ sedaj zapišemo v obliki

$$\frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2} + \cdots + \frac{k}{x_n} = A$$

Od tod je faktor obratnega sorazmerja

$$k = \frac{A}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Posamezni deli pri delitvi so

$$y_i = \frac{A}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \cdot \frac{1}{x_i} \quad \text{za vse} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.18}$$

Primer:
Znesek 50.000,00 d.e. moramo razdeliti na tri dele v razmerju $2 : 3 : 5$. Koliko znaša posamezen delež?

Rešitev:
Deli so premosorazmerni številom 2, 3 in 5 iz delitvenega razmerja.
Glede na formulo (2.17), ki velja v tem primeru, so podatki: $A = 50.000,00\,\text{d.e.}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ in $x_3 = 5$.
Od tod je

$$y_1 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_1 = \frac{50.000,00 \text{ d.e.}}{10} \cdot 2 = 10.000,00 \text{ d.e.}$$
$$y_2 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_2 = \frac{50.000,00 \text{ d.e}}{10} \cdot 3 = 15.000,00 \text{ d.e.}$$
$$y_3 = \frac{A}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot x_3 = \frac{50.000,00 \text{ d.e.}}{10} \cdot 5 = 25.000,00 \text{ d.e.}$$

Preizkus:
$$y_1 + y_2 + y_3 = 50.000,00 \text{ d.e.}$$

♦♦♦

Primer:
Nagradni fond 15.300,00 EUR se razdeli med prvih pet tekmovalcev in sicer tako, da je višina nagrade v obratnem sorazmerju z negativnimi točkami, ki so jih dobili tekmovalci. Prvi tekmovalec je dobil 10, drugi 15, tretji 8, četrti 12 in peti 20 kazenskih točk. Koliko so znašale posamezne nagrade?

Rešitev:
Deleži so v tem primeru obratno sorazmerni danim številom $x_1 = 10$, $x_2 = 15$, $x_3 = 8$, $x_4 = 12$ in $x_5 = 20$. Če so y_1, y_2, y_3, y_4 in y_5 nagrade, velja razširjeno sorazmerje

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 = \frac{1}{10} : \frac{1}{15} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12} : \frac{1}{20}$$

Iz formule (2.18) dobimo

$$y_1 = \frac{A}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{15300 \text{ EUR}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{10} = 3600 \text{ EUR}$$

Na enak način izračunamo še

$$y_2 = 2.400 \text{ EUR}$$
$$y_3 = 4.500 \text{ EUR}$$
$$y_4 = 3.000 \text{ EUR}$$
$$y_5 = 1.800 \text{ EUR}$$

Preizkus: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15.300$ EUR.

<u>Opomba:</u>
Nalogo lahko rešimo tudi tako, da jo prevedemo v premo sorazmerje in nato uporabimo formulo (2.17).
To bi storili takole, da člene na desni strani v sorazmerju

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 = \frac{1}{10} : \frac{1}{15} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12} : \frac{1}{20}$$

pomnožimo z najmanjšim skupnim imenovalcem 120 in dobimo premo sorazmerje

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 = 12 : 8 : 15 : 10 : 6$$

Sedaj seveda velja: $y_1 = 12k$, $y_2 = 8k$, $y_3 = 15k$, $y_4 = 10k$ in $y_5 = 6k$.

Zaradi $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15300$ dobimo

$$51k = 15.300 \Rightarrow k = 300.$$

Zato je $y_1 = 3.600$ EUR, $y_2 = 2.400$ EUR, $y_3 = 4.500$ EUR, $y_4 = 3.000$ EUR in $y_5 = 1.800$ EUR. Seveda je rezultat enak, kot v prejšnjem računu.
♦ ♦ ♦

2.5 Zmesni račun

Mnogokrat se zgodi, da je treba zmešati dve ali več vrst snovi različnih lastnosti (karakteristik), da dobimo novo snov z novimi drugačnimi lastnostmi. Naštejmo nekaj primerov: čisto zlato mešamo z bakrom, da dobimo zlato različne trdote (in cene), kave različnih kvalitet in različnih cen mešamo zato, da dobimo kavo srednje kvalitete, vendar s primerno ceno, mešanje alkohola visoke koncentracije z vodo da alkohol nižje koncentracije itd.
Takšne in podobne probleme rešuje *zmesni račun*.

Naloge s tega področja so določene predvsem na dva načina:

- dana je zahtevana kvaliteta (cena) mešanice in želimo določiti pravilno razmerje sestavin,
- lahko pa je dano razmerje sestavnih delov mešanice in računamo njeno kvaliteto (ceno).

Pri reševanju nalog zmesnega računa se moramo držati dveh osnovnih smiselnih predpostavk:

- vsota količin vseh sestavin pred mešanjem je enaka količini mešanice po mešanju,
- vsota vrednosti vseh vrst sestavin pred mešanjem je enaka vrednosti mešanice po mešanju.

Primer:
Mešamo dve vrsti kave. Cena prve vrste je 200,00 d.e. za kilogram, cena druge vrste pa je 130,00 d.e./kg. V kakšnem razmerju moramo mešati obe vrsti kave, da bo cena mešanice po 160,00 d.e./kg ?
Koliko kg kave prve vrste in koliko kg kave druge vrste moramo vzeti, da bomo dobili 140 kg mešanice po ceni 160,00 d.e./kg ?

Rešitev:
Označimo:
x_1 - količina 1. vrste kave pred mešanjem,
x_2 - količina 2. vrste kave pred mešanjem,
$(x_1 + x_2)$ - količina mešanice.

Vrednost prve vrste kave pred mešanjem je $x_1 \cdot 200$ denarnih enot, vrednost druge vrste kave pred mešanjem je $x_2 \cdot 130$ denarnih enot, vrednost mešanice pa je $(x_1 + x_2) \cdot 160$ denarnih enot. Ker mora biti vsota vrednosti vseh vrst sestavin pred mešanjem enaka vrednosti mešanice, velja

$$x_1 \cdot 200 + x_2 \cdot 130 = (x_1 + x_2) \cdot 160$$
$$(200 - 160)x_1 = (160 - 130)x_2$$
$$40x_1 = 30x_2$$
$$4x_1 = 3x_2$$

In od tod:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x_1 : x_2 = 3 : 4$$

Obe vrsti kave moramo mešati v razmerju $3 : 4$, to pomeni, da moramo vzeti 3 merske enote 1. kave in 4 merske enote 2. kave.
Odgovorimo še na drugo vprašanje. V mešanici so 3 enote 1. kave in 4 enote 2. kave, skupaj torej 7 enot. Ker je skupna masa mešanice 140 kg, je ena enota 20 kg. To pomeni, da moramo zmešati 60 kg prve kave in 80 kg druge kave.
♦ ♦ ♦

Poglejmo mešanje dveh vrst blaga splošno. Boljšega blaga z (višjo) ceno c_1 naj bo x_1 enot, slabšega blaga z (nižjo) ceno c_2 naj bo x_2 enot. Mešanice je seveda $(x_1 + x_2)$ enot, njena cena naj bo c_M. Zaradi predpostavke, da je vsota vrednosti vseh vrst sestavin pred mešanjem enaka vrednosti mešanice, velja

$$x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 = (x_1 + x_2) \cdot c_M$$

Enačbo uredimo

$$x_1(c_1 - c_M) = x_2(c_M - c_2)$$

Od tod

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{c_M - c_2}{c_1 - c_M} \tag{2.19}$$

oziroma

$$x_1 : x_2 = (c_M - c_2) : (c_1 - c_M) \tag{2.19a}$$

Privzeli smo že dejstvo, da je cena odvisna od kvalitete: višja cena višja cena, večja kvaliteta in nižja cena nižja kvaliteta, pa vidimo iz formule (2.19) pravilo:
Pri mešanju dveh vrst blaga z neko predpisano vmesno kvaliteto (ceno), morata biti deleža posameznih vrst blaga obratno sorazmerna razlikama med kvaliteto blaga in kvaliteto mešanice.

Na osnovi formule (2.19) si pri zmesnem računu lahko pomagamo z enostavno shemo, v katero zapišemo obe kvaliteti (ceni), kvaliteto (ceno) mešanice in razliko kvalitet:

<table>
<tr><th></th><th>količina</th><th>cena (kvaliteta)</th><th>cena (kvaliteta) mešanice</th><th>razlika cen (kvalitet)</th></tr>
<tr><td>1. vrsta</td><td>x_1</td><td>c_1</td><td rowspan="2">c_M</td><td>$c_M - c_2$</td></tr>
<tr><td>2. vrsta</td><td>x_2</td><td>c_2</td><td>$c_1 - c_M$</td></tr>
</table>

Ker velja $c_1 > c_M > c_2$, sta razliki $c_M - c_2$ in $c_1 - c_M$ vedno pozitivni.

Mešalno razmerje (2.19) preberemo iz zadnjega stolpca tabele.

Količini posamezne vrste blaga dobimo po formulah:

$$x_1 = \frac{c_M - c_2}{c_1 - c_2}(x_1 + x_2) \tag{2.20}$$

$$x_2 = \frac{c_1 - c_M}{c_1 - c_2}(x_1 + x_2) \tag{2.21}$$

O tem se prepričamo tako, da delimo enačbo (2.20) z enačbo (2.21)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{c_M - c_2}{c_1 - c_2}(x_1 + x_2)}{\frac{c_1 - c_M}{c_1 - c_2}(x_1 + x_2)}$$

in dobljeni zapis uredimo. Od tod pa res sledi formula (2.19).

Primer:
Mešamo mleko dveh kvalitet. Cena enega litra mleka prve kvalitete je 1,00 d.e., cena enega litra mleka druge kvalitete pa je 0,60 d.e. Koliko litrov mleka obeh kvalitet moramo zmešati, da dobimo 100 litrov mešanice po 0,70 d.e. za liter?

Rešitev:
Uporabimo s podatki našega primera zgornjo shemo:

	količina	cena	cena mešanice	razlika cen
1. vrsta mleka	x_1	1,00		0,10
			0,70	
2. vrsta mleka	x_2	0,60		0,30

Mešalno razmerje je $x_1 : x_2 = 0{,}10 : 0{,}30$ oziroma lepše $x_1 : x_2 = 1 : 3$, kar pomeni, da moramo v mešanici vzeti 1 del prve vrste in 3 dele druge vrste mleka.

Po formulah (2.20) in (2.21) pa izračunamo še količino

$$x_1 = \frac{c_M - c_2}{c_1 - c_2}(x_1 + x_2) = \frac{1{,}00}{0{,}40} \cdot 100l = 25l$$

$$x_2 = \frac{c_1 - c_M}{c_1 - c_2}(x_1 + x_2) = \frac{0{,}30}{0{,}40} \cdot 100l = 75l$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Koliko vode moramo priliti 50 litrom 90% alkohola, da dobimo 40% alkohol?

Rešitev:
Kvaliteto sedaj merimo s stopnjo alkohola v mešanici. Dogovorimo se, da je voda nič procentni alkohol (0%), tako da poznamo podatke: $c_1 = 90\%$, $c_2 = 0\%$, $c_M = 40\%$, $x_1 = 50 \ l$, iščemo pa x_2 in mešalno razmerje. Naloge se spet lotimo kar s shemo

	količina	cena	cena mešanice	razlika cen
1. vrsta alkohola	x_1	90	40	40
2. vrsta alkohola	x_2	0		50

Mešalno razmerje vode 90% alkohola in vode je $4 : 5$, torej $x_1 : x_2 = 4 : 5$. Ker $x_1 = 50$ poznamo, dobimo $x_2 = \frac{5}{4} \cdot 50 = 62{,}5$.

Alkoholu moramo primešati 62,5 l vode.

♦ ♦ ♦

Pri mešanju dveh vrst blaga je vprašanje mogoče zastaviti tudi tako: Količino x_1 blaga prve kvalitete c_1 zmešamo s količino x_2 blaga druge kvalitete c_2. Kakšna je kvaliteta mešanice c_M ?

Količina mešanice je seveda $(x_1 + x_2)$. Iz zahteve o enaki vrednosti surovin pred mešanjem in mešanice po mešanju dobimo enačbo

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = (x_1 + x_2) c_M$$

Od tod

$$c_M = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{x_1 + x_2} \tag{2.22}$$

Primer:
Zmešamo 100 g srebra čistine 800 in 200 g srebra čistine 950. Kakšno srebro dobimo?

Rešitev:
Iz podatkov $c_1 = 800$, $c_2 = 950$, $x_1 = 100\ g$, $x_2 = 200\ g$ sledi po formuli (2.22)

$$c_M = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{800 \cdot 100 + 950 \cdot 200}{300} = 900$$

Dobimo 300 g srebra čistine 900.

♦ ♦ ♦

Doslej smo imeli opravka z mešanjem dveh vrst blaga. V takšnih primerih pravimo, da operiramo z ***enostavnim zmesnim računom***. Kadar pa gre za mešanje treh ali več sestavin, govorimo o ***sestavljenem zmesnem računu.*** Ker imamo tedaj več vrst blaga, imamo tudi več neznank, zato je potrebno (na osnovi podatkov iz naloge) nastaviti dovolj enačb, da je

naloga enolično rešljiva. Če je pogojev (podatkov) premalo, dobimo premalo enačb in naloga ima lahko več rešitev.
Poglejmo si takšno možnost kar na primeru.

Primer:
Iz treh vrst alkohola z alkoholnimi stopnjami 40%, 60% in 70%, želimo dobiti 55% alkohol. V kakšnih količinah moramo mešati te tri vrste alkohola, da dobimo 40 litrov mešanice?

Rešitev:
Podatki so naslednji: $c_1 = 40\%$, $c_2 = 60\%$, $c_3 = 70\%$, $c_M = 55\%$, $(x_1 + x_2 + x_3) = 40\ l$.
Iščemo x_1, x_2 in x_3, torej imamo tri neznanke, zato potrebujemo tri enačbe, vendar iz podatkov lahko dobimo le dve enačbi:

$$
\begin{aligned}
40x_1 + 60x_2 + 70x_3 &= 55(x_1 + x_2 + x_3) \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 40
\end{aligned}
$$

Enačbi še uredimo

$$
\begin{aligned}
-15x_1 + 5x_2 + 15x_3 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 40
\end{aligned}
$$

Sistem linearnih enačb, ki ima več neznank kot enačb, v splošnem nima ene same rešitve. Če npr. člene z neznanko x_1 prenesemo na desno stran (podobno bi lahko storili tudi z x_2 ali z x_3), ki jo nato vzamemo kot znano, dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama x_2 in x_3:

$$
\begin{aligned}
5x_2 + 15x_3 &= 15x_1 \\
x_2 + x_3 &= 40 - x_1
\end{aligned}
$$

z rešitvijo

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 60 - 3x_1 \\
x_3 &= -20 + 2x_1
\end{aligned}
$$

Za izbrano vrednost neznanke x_1 dobimo natanko določeni vrednosti za x_2 in za x_3. Popolnoma poljubna pa neznanka x_1 le ni. Ker gre za konkreten mešalni problem, morajo biti vse tri neznanke večje (ali kvečjemu enake) od nič. Ta pogoj nam da neenačbi:

$$
\begin{aligned}
60 - 3x_1 \geq 0 &\Rightarrow x_1 \leq 20 \\
-20 + 2x_1 \geq 0 &\Rightarrow x_1 \geq 10
\end{aligned}
$$

Za neznanko x_1 smemo torej izbrati katero koli število z zaprtega intervala $10,\ 20$. Le v tem primeru bosta tudi neznanki x_2 in x_3 nenegativni.

Če hočemo v takšnih problemih med neskončno mnogimi možnostmi dobiti eno rešitev, je potrebno poznati ali določiti še kakšen dodaten pogoj, ki nam to omogoči.

V konkretnem problemu imamo surovine z alkoholnimi stopnjami 40%, 60% in 70%, in mešanico z 55% alkohola. Takšno mešanico bi lahko dobili, če bi mešali prvo in drugo surovino ali pa prvo in tretjo, nikakor pa ne moremo mešati druge in tretje. Imamo torej dva enostavna računa mešanja, za katera napravimo izračun po znani shemi.

a) mešanje prve in druge surovine:

	količina	kvaliteta (%)	kvaliteta mešanice (%)	razlika kvalitet (%)
1. vrsta alkohola	x_1	40	55	5
2. vrsta alkohola	x_2	60		15

b) mešanje prve in tretje surovine:

	količina	kvaliteta (%)	kvaliteta mešanice (%)	razlika kvalitet (%)
1. vrsta alkohola	x_1	40	55	15
3. vrsta alkohola	x_3	70		15

Mešanico 55% alkohola bi dobili, če bi mešali prvo in drugo vrsto alkohola v razmerju 5 : 15 (oziroma 1 : 3) ali pa prvo in tretjo vrsto v razmerju 15 : 15 (oziroma 1 : 1). Obe mešanici imata 55% alkoholno stopnjo. To pomeni, da ima mešanica iz teh dveh mešanic vedno 55% alkohola, ne glede na njuno mešalno razmerje. Iz tega vzroka se pojavi vprašanje, koliko alkohola naj napravimo s prvim in koliko z drugim mešanjem, da bomo dobili skupno količino 40 litrov mešanice. Možnosti je seveda (teoretično) neskončno mnogo, najenostavneje je vzeti kar $(5+15)$ enot prve surovine, ker nastopa v obeh posameznih mešanjih, 15 enot druge in 15 enot tretje. Vse tri surovine so tedaj v razmerju

$$x_1 : x_2 : x_3 = 20 : 15 : 15$$

oziroma

$$x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 3$$

To pomeni: $x_1 = 4k$, $x_2 = 3k$, $x_3 = 3k$. Iz pogoja $(x_1 + x_2 + x_3) = 40$ dobimo $10k = 40$ oziroma $k = 4$.

Ena od možnih rešitev se torej glasi: vzeti moramo 16 litrov 40% alkohola, 12 litrov 60% alkohola in 12 litrov 70% alkohola.

Obe posamezni shemi moremo zapisati tudi v eni sami, npr. takole:

	količina	kvaliteta	kvaliteta mešanice	razlika kvalitet
1. vrsta alkohola	x_1	40		15
				= 20
1. vrsta alkohola	x_1	40		5
			55	
2. vrsta alkohola	x_2	60		15
3. vrsta alkohola	x_3	70		15

Shema nam ponudi eno od neskončno mnogo možnosti, ki so na razpolago.
♦ ♦ ♦

2.6 Procentni račun

Procent (***odstotek***) pomeni eno stotino celote. Če celota pomeni 1 (ena enota), je

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01 \tag{2.23}$$

Podobno je

$$2\% = 2 \cdot \frac{1}{100} = \frac{2}{100} = 0{,}02\,, \quad 77\% = \frac{77}{100} = 0{,}77\,, \quad 157\% = \frac{157}{100} = 1{,}57 \quad \text{itd.}$$

Tudi v obratni smeri velja: decimalna števila smemo zapisati v obliki procentov, na primer $0{,}08 = \frac{8}{100} = 8\%$, $0{,}14 = \frac{14}{100} = 14\%$, $1{,}50 = 150\%$.

Če pravimo, da se je prodaja v nekem podjetju leta 2019 vrednostno povečala za 17% glede na leto 2018, to pomeni, da je bila na vsakih 100 denarnih enot prodaje v letu 2018, prodaja v letu 2019 za 17 denarnih enot večja. Drugače rečeno, če označimo skupno prodajo v letu 2018 z znakom *x*, je bila prodaja v letu 2019 za $\frac{17}{100}x = 0{,}17x$ večja oziroma je znašala $x + 0{,}17x = 1{,}17x$.

V konkretnih primerih, s kakršnimi imamo tudi sicer opravka, se pojem procent vedno veže na konkretno celoto, izraženo v konkretnih enotah, npr. urah, kilogramih, metrih, denarnih enotah, …

Splošno nastopajo pri procentnem računu tri osnovne količine:

C - celota ali osnovna vrednost
p - procentna mera
d - procentni delež

Celota ali osnovna vrednost pomeni tisto količino, ki ustreza 100% in na ta način predstavlja izhodiščno vrednost za računanje ***deležev***. Procentni delež merimo v istih enotah (ure, metri,...) kot celoto.

Primer:
V nekem podjetju se je prodaja v letu 2019 vrednostno povečala za 17% glede na leto 2018. Kolikšno je to povečanje, če so leta 2018 prodali za 1.500,000 EUR blaga?

Rešitev:
Osnovna vrednost, glede na katero bomo računali povečanje, je 1.500.000 EUR, procentna mera je 17%, iščemo procentni delež. Nalogo lahko rešimo na več načinov: s sklepnim in verižnim računom, z linearnimi enačbami ali s sorazmerji. Izračunajmo rešitev na prve tri načine.

a) Sklepni račun: seveda gre za premo sorazmerje, zato je

100% prodaje	....	1.500.000	EUR
17% prodaje	....	x	EUR

$$x = \frac{1500000 \cdot 17}{100} = 255000$$

Delež povečanja prodaje je 255.000 EUR.

b) Ker gre za premo sorazmerje, smemo uporabiti tudi verižni račun:

x EUR (prodaje)	17%
100%	1.500.000 EUR (prodaje)

$$x = \frac{17 \cdot 1500000}{100} = 255000$$

c) Linearna enačba:

$$0{,}17\,C = x \Rightarrow \; x = 0{,}17 \cdot 1500000 = 225000$$

♦ ♦ ♦

Vzemimo spet splošne podatke, torej celoto *C*, procentno mero *p* in procentni delež *d*. Celoti *C* ustreza 100%, deležu *d* pa *p*%, zato lahko zapišemo njihove odnose v obliki sorazmerja. Razmerje med celoto in deležem je po definiciji namreč enako kot razmerje med 100% in *p*%, kar zapišemo s sorazmerjem

$$C : d = 100 : p \tag{2.24}$$

Iz tega sorazmerja dobimo obrazce za računanje posameznih količin

$$d = \frac{C \cdot p}{100} \tag{2.25}$$

$$C = \frac{100 \cdot d}{p} \tag{2.26}$$

$$p = \frac{d \cdot 100}{C} \tag{2.27}$$

<u>Primer:</u>
Konec leta 2018 je bilo v podjetju skupno 85 zaposlenih, konec leta 2019 pa je bilo 3,53% zaposlenih manj. Koliko zaposlenih je bilo konec leta 2019?

<u>Rešitev:</u>
Osnovna vrednost (celota) je stanje zaposlenih konec leta 2018. Zmanjšanje zaposlenih je dano v procentih, iščemo delež, ki pripada temu procentu. Podatki so: $C = 85$, $p = 3{,}53\%$. Iskani delež lahko izračunamo na več načinov (npr. s sklepanjem, z verižnim računom), vendar bomo sedajle uporabili formulo (2.25).

$$d = \frac{C \cdot p}{100} = \frac{85 \cdot 3{,}53}{100} = 3$$

Konec leta 20179 so bili v podjetju trije zaposleni manj kot konec leta 2018, torej je skupno število zaposlenih 82.

♦ ♦ ♦

<u>Primer:</u>
V seriji 5500 izdelkov je 110 izdelkov neuporabnih. Koliko procentov je to?

Rešitev:
Ker poznamo $C = 5500$ in $d = 110$, računamo pa p, lahko uporabimo kar formulo (2.27) in že imamo

$$p = \frac{d \cdot 100}{C} = \frac{110 \cdot 100}{5500} = 2$$

Neuporabnih je 2% izdelkov.
♦ ♦ ♦

Primer:
Nekomu se je letna plača povečala za 1,5%, kar pomeni 225,00 EUR neto. Kakšno letno neto plačo je imel prej?

Rešitev:
Zaradi $p = 1{,}5\%$ in $d = 225{,}00$ EUR je po formuli (2.26)

$$C = \frac{100 \cdot d}{p} = \frac{100 \cdot 225{,}00}{1{,}5} = 15.000{,}00$$

Prvotna letna neto plača je bila 15.000,00 EUR.
♦ ♦ ♦

Opomba:
Formul (2.25) - (2.27), ki smo jih dobili iz sorazmerja (2.24), običajno ne znamo na pamet, saj zato ni nobene potrebe. Ko prvo, drugo ali tretjo potrebujemo, jo lahko vsakokrat posebej izpeljemo ali pa, še enostavneje, naloge procentnega računa rešujemo s sklepanjem.

Doslej smo vedno poznali (ali pa računali) celoto *C*, ki ustreza 100%. V praksi pa se večkrat zgodi, da celota, ki ustreza 100%, ni znana, niti ni znan procentni delež *d*, pač pa je poznana za ta delež *povečana celota* $C + d$ ali *zmanjšana celota* $C - d$. Ker celoti *C* ustreza 100%, deležu d pa *p*%, ustreza povečani celoti $C + d$ več, to je $(100 + p)\%$, zmanjšani celoti $C - d$ pa seveda manj, to je $(100 - p)\%$. Zaradi tega pravimo računu, kjer nastopa povečana celota, tudi ***procentni račun nad 100***, računu, kjer nastopa zmanjšana celota, pa ***procentni račun pod 100***.

Pri računanju s procenti moramo biti zelo pazljivi ravno pri določanju osnove, od katere računamo procentni meri pripadajoči delež oziroma deležu pripadajočo procentno mero.

<u>Primer:</u>
V trgovini smo za zgoščenko dobili 5% popusta, tako da je z odštetim popustom stala 27,55 EUR. Kolikšna je bila prvotna prodajna cena zgoščenke?

<u>Rešitev:</u>
Celota je prvotna cena, saj smo dobili 5% popusta na to ceno. Znesek 27,55 EUR predstavlja za 5% zmanjšano celoto, torej ustreza $(100-5)\%$. Nalogo rešimo kar s sklepnim računom:

$$\begin{array}{rl} 95\% \ldots & 27,55 \text{ EUR} \\ 100\% \ldots & x \quad \text{EUR} \end{array}$$

Od tod

$$x=\frac{27,55\cdot 100}{95}=29,00$$

Prvotna cena zgoščenke je bila 29,00 EUR.

Preverimo, če je rezultat pravilen. Če je prvotna cena res 29,00 EUR, je popust znašal $(29,00-27,55)$ EUR=1,45 EUR. Po drugi strani je 5% od celote 29,00 res 1,45. Oba rezultata se ujemata, račun je pravilen.

♦ ♦ ♦

<u>Primer:</u>
Maloprodajna cena televizorja z 22% davkom na dodano vrednost (DDV) znaša 1.417,50 EUR. Kolikšna je cena brez DDV in koliko znaša sam DDV?

<u>Rešitev:</u>
Gre za procentni račun nad 100. Osnova, ki ustreza 100%, je cena brez DDV, končna cena ustreza 122%.
Rešimo nalogo z uporabo verižnega računa, ki ga smemo uporabiti, saj je razmerje premo.

$$\begin{array}{l|l} x \text{ EUR} & 100\% \\ 122\% & 1.417,50 \text{ EUR} \\ \hline \end{array}$$

$$x=\frac{100\cdot 1417,50}{122}=1161,89$$

Cena brez DDV je 1.161,89 EUR, davek na dodano vrednost pa znaša 255,61 EUR.

♦ ♦ ♦

Primer:
Nekdo je za avtorsko delo dobil neto znesek 510,00 EUR. Na kakšen znesek se je glasila avtorska pogodba v bruto znesku, če je za delo po avtorski pogodbi treba plačati 25% akontacije dohodnine od 90% pogodbenega (bruto) zneska.

Rešitev:
Najprej ugotovimo koliko je 25% od 90%, kolikor znaša akontacija dohodnine na avtorsko pogodbo. Sklepanje je običajno: 1% od 90% predstavlja eno stotino od 90 stotin, to je $0,01 \cdot 0,90 = 0,009 = 0,9\%$, 25% pa pomeni 25-krat več, to je $0,9\% \cdot 25 = 22,5\%$.
Akontacija dohodnine za delo po avtorski pogodbi torej znaša 22,5% od bruto zneska. Naš strokovnjak je dobil neto znesek 510,00 EUR, kar ustreza 77,5%, zato velja

$$510,00 \text{ EUR} \ldots 77,5\%$$
$$x \text{ EUR} \ldots 100\%$$

$$x = \frac{510 \cdot 100}{77,5} = 658,06 \text{ EUR}$$

Bruto znesek je znašal 658,06 EUR.
♦ ♦ ♦

Primer:
Cena nekega proizvoda se je povečala za 10%. Za koliko % se mora znižati nova cena, da bo enaka prvotni?

Rešitev:
Odgovor, ki ga (nepremišljeno) da presenetljivo mnogo ljudi in se glasi: "10%", je seveda napačen. *Nova cena* predstavlja *novo osnovo*, od katere računamo procentno mero za enak delež. Ker je osnova spremenjena (v tem primeru povečana), je tudi procentna mera za enak delež drugačna. Zaradi večje osnove in enakega deleža pričakujemo manjšo procentno mero.
Rešimo nalogo z linearno enačbo. Označimo prvotno ceno *C*, novo ceno pa C_1. Med njima velja zveza:

$$C_1 = C + \frac{10 \cdot C}{100} = 1{,}10\,C$$

Novo ceno C_1 moramo znižati za *x* %, da dobimo prvotno ceno *C*. Od tod dobimo enačbo

$$C_1 - \frac{x \cdot C_1}{100} = C$$

Izpostavimo C_1 in dobimo $C_1\left(1 - \frac{x}{100}\right) = C$. Zaradi $C_1 = 1{,}10\ C$ velja

$$1{,}10\ C\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)=C$$

To enačbo krajšajmo s C (to deljenje je seveda dovoljeno, saj cena ni enaka 0), uredimo in že imamo

$$x=\frac{110-100}{1{,}10}=9{,}1$$

Novo ceno je torej treba znižati za 9,1%. Znižanje v procentih je manjše kot povečanje, saj je nova osnova, od katere računamo procentno mero, večja od stare osnove.
♦ ♦ ♦

Primer:
Cena nekega proizvoda se je dvignila za $p\%$. Za koliko % se mora znižati nova cena, da bo enaka prvotni?

Rešitev:
Označimo prvotno ceno C, novo ceno pa C_1. Procentna mera povečanja je $p\%$, procentna mera zmanjšanja pa naj bo $p_1\%$.

Velja

$$C_1=C+\frac{Cp}{100}=C\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Nova cena C_1, zmanjšana za $p_1\%$, je

$$C_1-\frac{C_1p_1}{100}=C_1\left(1-\frac{p_1}{100}\right)$$

Iz enačbe

$$C\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p_1}{100}\right)=C$$

dobimo

$$p_1=\frac{100\,p}{100+p}$$

♦ ♦ ♦

2.7 Promilni račun

Poleg procenta uporabljamo tudi pojem ***promil*** (ali tudi ***promile***). Pri procentnem računu smo osnovo delili na 100 enakih delov, pri promilnem računu pa jo razdelimo na 1000 enakih delov. Tako nam 1 promil (znak ‰) pomeni $\frac{1}{1000}$ neke celote, $2‰ = \frac{2}{1000}$ celote in splošno $p‰ = \frac{p}{1000}$ celote. Računanje poteka na enak način kot pri procentnem računu, razlika je le v tem, da se tu kot osnova pojavlja število 1000 .

Primer: Na začetku leta je bilo v nekem mestu 159.500 prebivalcev, konec leta pa 6‰ več. Koliko prebivalcev je bilo na koncu leta?

Rešitev:
Uporabimo kar sklepni račun:

$$159500 \ldots 1000‰$$
$$x \ldots 6‰$$

$$x = \frac{159500 \cdot 6}{1000} = 957$$

Konec leta je bilo 957 prebivalcev več kot na začetku leta, torej jih je bilo 160457.
♦ ♦ ♦

Primer: Banka je zaračunala 8‰ provizije, tako da smo dobili izplačano 29.760,00 d.e. Koliko bi dobili, če bi ne bilo provizije?

Rešitev:
Uporabimo verižni račun:

x d.e.	1000‰
992‰	29.760,00 d.e.

$$x = \frac{1000 \cdot 29760{,}00}{992} = 30\,000{,}00$$

Izplačilo brez provizije bi bilo 30.000,00 d.e..
♦ ♦ ♦

Opomba: V prejšnji nalogi smo poznali zmanjšano celoto $(C-d)$, ki ustreza $(1000-p)‰$. Pravimo, da gre za ***promilni račun pod 1000.***

Poglejmo še primer za ***promilni račun nad 1000.***

Primer: Proizvodnja se je povečala za 11,3‰ in znaša 536 izdelkov. Kolikšna je bila prvotna proizvodnja?

Rešitev:

$$\begin{array}{rlcl} 536 & \text{izdelkov} & \dots & 1011{,}3‰ \\ x & \text{izdelkov} & \dots & 1000‰ \\ \hline \end{array}$$

$$x=\frac{536\cdot 1000}{1011{,}3}=530$$

Prvotna proizvodnja je bila 530 izdelkov.

♦ ♦ ♦

Tudi pri promilnem računu lahko uporabimo sorazmerje in dobimo obrazce, podobne obrazcem (2.25) - (2.27) pri procentnem računu.

Če označimo:

C - osnova (celota)
p - promilna mera
d - promilni delež

se sorazmerje glasi

$$C : d = 1000 : p \tag{2.28}$$

Od tod dobimo naslednje formule:

$$d=\frac{C\cdot p}{1000} \tag{2.29}$$

$$C=\frac{1000\cdot d}{p} \tag{2.30}$$

$$p=\frac{d\cdot 1000}{C} \tag{2.31}$$

Tudi tu velja enaka opomba:
Formul (2.29) - (2.31) ni potrebno znati na pamet, saj jih lahko vsakokrat posebej izpeljemo iz sorazmerja (2.28).

Naloge

1. Iz sorazmerij $x : y = 2 : 3$, $y : z = 1 : 4$ in $z : u = 2 : 3$ poišči razmerje $x : u$.

2. V 6 dneh je 5 tovornjakov, vsak v 3 vožnjah dnevno, prepeljalo 720 t materiala. Koliko materiala bi prepeljalo 8 tovornjakov v 5 dneh, če vsak opravi 2 vožnji dnevno?

3. Delavec A bi opravil delo sam v 16 dneh, delavec B pa bi to delo opravil sam v 12 dneh. Prvi delavec začne z delom 10. junija, drugi delavec pa 12. junija. Kdaj bo delo končano?

4. Zobato kolo s 24 zobmi poganja drugo zobato kolo s 60 zobmi. Kolikokrat se zavrti drugo kolo, če se prvo zavrti 100 - krat?

5. Neko delo opravijo 4 delavci v 10 dneh, če delajo po 10 ur dnevno. Koliko delavcev bi potrebovali, da bi opravili to delo v 5 dneh, če bi delali po 8 ur na dan?

6. 40 lb nekega blaga stane 140,50 USD. Koliko EUR stane uvoznika 1 kg tega blaga, če mora plačati še 30% carine in ostalih stroškov? (1 lb = 0,454 kg; 1 EUR = 1,2776 USD).

7. V Londonu stane stane 20 yd nekega blaga toliko kot 150 lb pšenice. 10 lb pšenice stane 1 USD. Koliko EUR stane uvoznika 1 m blaga, če mora plačati še 25% carine in ostalih stroškov? (1 EUR = 1,2776 USD in 1yd = 0,9144 m).

8. Trije sosedje so skupaj naročili pesek. Dogovorili so se, da bodo pesek in prevozne stroške plačali v razmerju naročenih količin, to je $1 : 2 : 3$. Koliko je plačal vsak, če so morali skupaj plačati 300,00 EUR?

9. Podjetje je za dostavo blaga iz treh različnih krajev plačalo skupno 750,00 EUR. Celotne prevozne stroške želi razdeliti na posamezne prevoze tako, da so premo sorazmerni masi blaga in oddaljenosti krajev, od koder je bilo blago prepeljano. Oddaljenosti krajev in mase blaga so dane v tabeli:

kraj	oddaljenost (km)	masa blaga (t)
A	75	20
B	100	60
C	50	50

Koliko prevoznih stroškov odpade na vsak posamezen prevoz?

10. Nagrado 3.000 EUR razdelimo med tri tekmovalce. Prvi prejme toliko kot drugi in tretji skupaj, drugi pa prejme dvakrat toliko kot tretji. Kolikšne so posamezne nagrade?

11. Mešamo dve vrsti kave. Cena prve je 2.500,00 d.e./kg, cena druge pa 2.200,00 d.e./kg. V kakšnem razmerju moramo mešati obe vrsti kave, da dobimo mešanico po 2.400,00 d.e./kg ? Koliko kg prve in koliko kg druge kave moramo zmešati, da bomo dobili 60 kg mešanice po dogovorjeni ceni 2.400 d.e./kg ?

12. Kakšno mešanico smo dobili, če smo zmešali smo 10 litrov 40% alkohola in 10 litrov 15% alkohola?

13. Koliko litrov vode moramo primešati 5 litrom 96% alkohola, da dobimo 70% alkohol?

14. Cena nekega izdelka se je povečala za 14%, nato pa še za 8%. Prvotna cena je bila 285,00 EUR. Kakšna je cena izdelka po drugem povečanju? Za koliko % je zadnja cena višja od prvotne?

15. Podjetje je preseglo mesečni načrt prodaje za 12,5%, kar znaša 200.000 EUR. Za koliko procentov bi presegli prodajni načrt, če bi bila mesečna realizacija 1.920.000 EUR.

16. Čevlji so se pocenili za 5% in stanejo sedaj 80,75 EUR. Koliko so stali pred pocenitvijo?

17. Blago se je pocenilo za 10%. Za koliko % več tega blaga dobimo sedaj za enak znesek denarja?

18. Blago se je pocenilo za p%. Za koliko % več tega blaga dobimo sedaj za enak znesek denarja?

19. V neki državi vrnejo tujcem 14% davka na dodano vrednost. Koliko bomo dobili povrnjeno, če smo kupili blago za 500 EUR?

20. Podjetje ima dve prodajni mesti. Zaposleni v prvem prodajnem mestu so prodali za 560.000 EUR blaga in s tem dosegli samo 92% planirane realizacije, zaposleni v drugem prodajnem mestu pa so prodali za 2.205.000 EUR blaga in s tem presegli prodajni načrt za 5%. Kolikšen je bil skupni prodajni načrt podjetja in kakšna je skupna realizacija v procentih?

21. Koliko je 2% od 2% ?

22. Cena nekega blaga se je povečala za 5% in nato še za 6%. Kasneje se je nova cena znižala za 5%. Za koliko % se mora še znižati, da bo nova cena enaka prvotni?

23. Nekdo je prejel neto znesek 1.000,00 EUR. Koliko je bil bruto znesek, če je moral plačati 40% davka?

24. Skupno z 1,03% provizije smo na banki plačali 353,60 EUR. Koliko je znašal znesek plačila in koliko je znašala provizija?

25. Dve ceni sta v razmerju 2 : 3. Če prvo ceno povečamo za 10%, drugo pa zmanjšamo za 20%, je druga cena še vedno za 1.000,00 EUR večja od prve. Kolikšni sta ti dve ceni?

Rešitve

1. $x : u = 1 : 9$
2. 640 t
3. Delavec A dela *x* dni, delavec B dela (*x*-2) dni. Rešitev: $x = 8$. Delavca končata 17.junija.
4. 40-krat
5. 10 delavcev
6. 7,87 EUR
7. 0,81 EUR
8. 50,00 EUR, 100,00 EUR, 150,00 EUR
9. 112,50 EUR, 450,00 EUR, 187,50 EUR
10. 1.500 EUR, 1.000 EUR, 500 EUR
11. $x : y = 2 : 1$, 40 kg prve, 20 kg druge
12. 27,5%
13. 1,875 litrov
14. $c_1 = 285{,}00$ EUR, $c_3 = 350{,}90$ EUR, zadnja cena je večja od prve za 23,12%.
15. 20%
16. 85,00 EUR
17. Naj bo: *c* - prvotna cena, *k* - prvotna količina blaga, ki jo lahko kupimo, produkt $c \cdot k$ je znesek, ki bi ga potrošili. Nova cena je za 10% manjša, torej znaša $\left(c - \frac{c \cdot 10}{100}\right)$, nova količina blaga je za *x* % večja in znaša $\left(k + \frac{k \cdot x}{100}\right)$. Produkt nove cene in nove količine je enak znesku, ki bi ga porabili za nakup in je enak prvotnemu znesku: $c \cdot k = \left(c - \frac{c \cdot 10}{100}\right) \cdot \left(k + \frac{k \cdot x}{100}\right)$. Na desni strani izpostavimo *c* iz prvega dvočlenika in *k* iz drugega. Enačbo nato delimo s produktom *c.k* ($c \cdot k \neq 0$) in izračunamo neznani *x*.
    Rešitev: $x = 11{,}11\%$
18. $c \cdot k = \left(c - \frac{c \cdot p}{100}\right) \cdot \left(k + \frac{k \cdot x}{100}\right) \Rightarrow x = \frac{100p}{100 - p}$
19. 61,40 EUR
20. 3.900.000 EUR, 99%
21. $x = 0{,}02 \cdot 0{,}02 = 0{,}0004 = 0{,}04\% = 0{,}4‰$
22. 5,424%
23. 1.666,67 EUR
24. 350,00 EUR in 3,60 EUR
25. 10.000,00EUR in 15.000,00 EUR

3 ZAPOREDJA

3.1 Splošno o zaporedjih

Zaporedje števil dobimo, če upodobimo množico naravnih števil v množico realnih ali kompleksnih števil. V prvem primeru dobimo realno zaporedje, v drugem primeru pa govorimo o kompleksnem zaporedju. V nadaljevanju bomo govorili le o realnih zaporedjih.

Definicija: *Preslikava* $f: N \to R$ *vsakemu naravnemu številu priredi neko realno število. Za vsako naravno število n dobimo neko realno število* $f(n)$*. Prvemu naravnemu številu 1 pripada realno število* $f(1)$*, ki ga običajno označimo* a_1*, številu 2 pripada število* $f(2) = a_2$ *itd. Splošno naj naravnemu številu n pripada število* a_n *. Imenujemo ga n-ti ali* ***splošni člen*** *zaporedja, n pa je* **indeks** *tega člena.*

Običajno zapišemo člene zaporedja po vrstnem redu indeksov. Najprej zapišemo prvi člen a_1, nato drugi člen a_2 itd.:

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ \dots \ , \ a_n \ , \ \dots$$

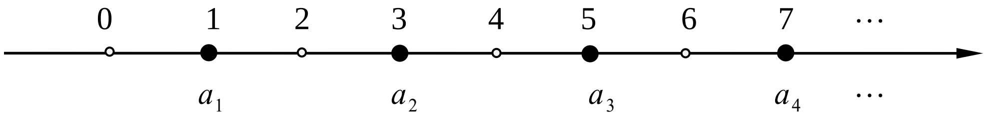
Zaporedje s splošnim členom a_n pogosto označimo krajše $\{a_n\}$.

Primer:
S splošnim členom $a_n = n^3$ določamo zaporedje kubov naravnih števil: $1, 8, 27, 64, \dots$, s splošnim členom $a_n = \frac{1}{n}$ določamo zaporedje recipročnih naravnih števil: $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4, \dots$, s splošnim členom $a_n = -n$ določamo negativna naravna števila: -1, - 2, - 3, …. , s splošnim členom $a_n = 2n$ določamo soda števila: 2, 4, 6, 8, ….. in podobno.
♦ ♦ ♦

Ker so členi zaporedja realna števila, jih lahko ponazorimo s točkami številske premice, s čimer dobimo tudi vizualno predstavo o zaporedju.

Primer:
Ponazorimo s točkami številske premice prve štiri člene zaporedje s splošnim členom $a_n = 2n-1$.

Rešitev:
V splošni člen po vrsti vstavimo naravna števila 1, 2, 3,... in dobimo zaporedje 1, 3, 5, 7,.. . Grafično upodobitev vidimo na sliki 19.



Slika 19: Graf zaporedja (prvi štirje členi) s splošnim členom $a_n = 2n-1$

♦ ♦ ♦

Primer:
Poiščimo splošni člen zaporedja $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$

Rešitev:
Splošni člen je zapisan v obliki ulomka, v katerem je vrednost imenovalca vedno za 1 večja od vrednosti števca. Prvi člen dobimo pri $n=1$, drugi člen pri $n=2$, tretji člen pri $n=3$ itd. Od tod je že očitno, da je splošni člen $a_n = \frac{n+1}{n+2}$.

♦ ♦ ♦

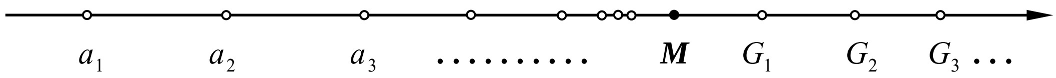
Definicija: *Zaporedje $\{a_n\}$ je* ***naraščajoče****, če za vsak n velja: $a_{n+1} \geq a_n$. Zaporedje je* ***strogo naraščajoče****, če za vsak n velja $a_{n+1} > a_n$.*

Definicija: *Zaporedje $\{a_n\}$ je* ***padajoče****, če za vsak n velja: $a_{n+1} \leq a_n$. Zaporedje je* ***strogo padajoče,*** *če za vsak n velja $a_{n+1} < a_n$.*

Padajočim ali naraščajočim zaporedjem pravimo *monotona* zaporedja.

Definicija: *Realno* število *G, od katerega ni noben člen zaporedja večji, se imenuje* ***zgornja meja*** *zaporedja. Zaporedje, za katerega obstoja zgornja meja, je* ***navzgor omejeno****.*

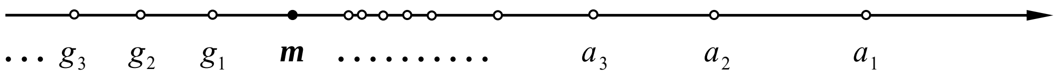
Če za zaporedje obstoja zgornja meja, jih je neskončno mnogo. Najmanjša med njimi je ***natančna zgornja meja M*** (slika 20).



Slika 20: Zgornje meje zaporedja in natančna zgornja meja

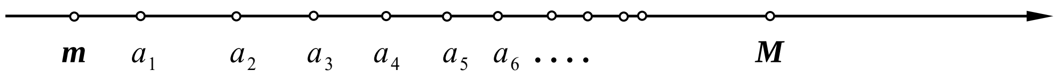
<u>Definicija</u>: *Realno število g, od katerega ni noben člen zaporedja manjši, se imenuje* ***spodnja meja*** *zaporedja. Zaporedje, za katerega obstoja kakšna spodnja meja, je* **navzdol** ***omejeno***.

Če za zaporedje obstoja spodnja meja, jih je neskončno mnogo. Največja med njimi je ***natančna spodnja meja m*** (slika 21).



Slika 21: Spodnje meje zaporedja in natančna spodnja meja

<u>Definicija</u>: *Zaporedje, ki je omejeno na obe strani, imenujemo* ***omejeno zaporedje***. *Omejeno zaporedje je torej takšno, kjer so vsi členi zaporedja na intervalu* $[m, M]$. Grafična upodobitev je na sliki 22.



Slika 22: Omejeno zaporedje

<u>Primer:</u>

Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

a) Pokažimo, da je zaporedje strogo naraščajoče.

b) Ali je število $\dfrac{19}{11}$ člen zaporedja?

c) Koliko členov leži na intervalu $\left(1, \dfrac{11}{7}\right]$?

d) Poiščimo natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M tega zaporedja!

<u>Rešitev:</u>

a) Za strogo naraščajoče zaporedje velja $a_{n+1} > a_n$. To pomeni, da je kriterij za strogo naraščajoče zaporedje lahko zapisan v dveh oblikah

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \text{oziroma} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \text{ ko je } a_n \neq 0 .$$

V našem primeru ugotovimo z obema kriterijema, da je dano zaporedje res strogo naraščajoče.
Ker je $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$, je $a_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

Upoštevajmo to v obeh kriterijih:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0$$

ter tudi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2n+1}{n+2}}{\dfrac{2n-1}{n+1}} = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n-2} = 1 + \frac{3}{2n^2+3n-2} > 1$$

b) Število $\dfrac{19}{11}$ bo člen zaporedja, če za neki n velja enakost $\dfrac{2n-1}{n+1} = \dfrac{19}{11}$. Ker je ta enačba izpolnjena pri $n = 10$, je število $\dfrac{19}{11}$ deseti člen zaporedja, torej $a_{10} = \dfrac{19}{11}$.

c) Na intervalu $\left(1,\ 11/7 \right.$ ležijo tisti členi zaporedja, za katere velja zahteva: $1 < a_n \le \dfrac{11}{7}$. Ta pogoj zapišemo kot sistem dveh neenačb

$$\frac{2n-1}{n+1} > 1 \qquad \text{in} \qquad \frac{2n-1}{n+1} \le \frac{11}{7}$$

Prva neenačba ima rešitev $n > 2$, druga pa $n \le 6$. Ker morata obe neenačbi veljati hkrati, pomenijo rešitev sistema vsi tisti indeksi n, ki so večji od 2 in manjši ali enaki 6, torej $2 < n \le 6$. Na intervalu $\left(1,\ 11/7 \right.$ ležijo štirje členi zaporedja, to so: a_3, a_4, a_5 in a_6.

d) Zaporedje je strogo naraščajoče, zato je natančna spodnja meja m kar enaka prvemu členu zaporedja: $m = \dfrac{1}{2}$.
Določimo še natančno zgornjo mejo.
Če v ulomku $\dfrac{2n-1}{n+1}$ delimo števec z imenovalcem, lahko zapišemo splošni člen v obliki $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1} = 2 - \dfrac{3}{n+1}$. Od tod vidimo, da je 2 tisto število, ki ga noben člen zaporedja ne preseže. Ker je 2 najmanjše tako število, je to natančna zgornja meja $M = 2$.

♦ ♦ ♦

Primer:
Določimo natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo zaporedja s splošnim členom $a_n = n^2 + 1$.

Rešitev:
Členi zaporedja so 2, 5, 10, 17, 26, ... Z naraščajočim *n* členi stalno naraščajo, zato zaporedje nima nobene zgornje meje.
Natančna spodnja meja je kar enaka prvemu členu zaporedja, $m = 2$.
♦ ♦ ♦

Definicija: ***Stekališče zaporedja*** *je tako število s, da se od njega neskončno mnogo členov zaporedja loči tako malo, kot le hočemo. Za vsako poljubno majhno pozitivno število* ε *obstaja neskončno mnogo členov* a_n *, za katere je izpolnjena neenačba*

$$|\, a_n - s \,| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{3.01}$$

To neenačbo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon \tag{3.02}$$

Ker odprti interval $(s - \varepsilon,\ s + \varepsilon)$ imenujemo $\varepsilon -$ *okolica točke s*, smemo povedati definicijo stekališča tudi z drugimi besedami:

Število s imenujemo stekališče zaporedja $\{a_n\}$, *če vsaka, še tako majhna* $\varepsilon -$ *okolica točke s, vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja.*

Primer:
Pokažimo, da je število 1 stekališče zaporedja s splošnim členom $a_n = \dfrac{n-1}{n}$.

Rešitev:
Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$ in ugotovimo, za katere indekse *n* je izpolnjena neenačba $|\, a_n - s \,| < \varepsilon$.
Ker je po podatkih naloge stekališče število 1, torej *s* = 1, se neenačba (3.01) glasi $\left| \dfrac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$.

Od tod je:

$$\left| \frac{n-1-n}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| -\frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

Ker je $n \in \boldsymbol{N}$, je število $\left(-\frac{1}{n}\right)$ negativno, zato je po definiciji absolutne vrednosti potrebno spremeniti predznak, torej $\left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ in dobimo neenačbo

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Število ε je poljubno pozitivno število, zato je neenačba $n > \frac{1}{\varepsilon}$ izpolnjena za neskončno mnogo *n*, kar pomeni, da je število 1 res stekališče danega zaporedja.

♦ ♦ ♦

Zaporedja imajo v splošnem lahko različno število stekališč: nobenega, eno, dve ali več. Katera zaporedja imajo stekališča? Možno je dokazati, da *ima vsako omejeno zaporedje vsaj eno stekališče*.

Zanimiva so takšna zaporedja, ki imajo *natanko eno stekališče*. V tem primeru dobi to stekališče posebno ime - imenujemo ga ***limita zaporedja*** in označimo

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \tag{3.03}$$

Definicija: *Zaporedje, ki ima limito, imenujemo* ***konvergentno****. Zaporedje, ki nima limite, imenujemo* ***divergentno****.*

Definicija: *Zaporedje* $\{a_n\}$ ***konvergira*** *proti limiti a, če leže v vsaki okolici števila a vsi členi tega zaporedja od nekega člena naprej.*

To definicijo lahko povemo tudi takole:

Realno število a je limita zaporedja, če je v vsaki poljubno majhni $\varepsilon -$ *okolici tega števila neskončno mnogo, zunaj okolice pa le končno mnogo členov zaporedja. Za limito zaporedja je za vsak* $n \geq n_0$ *dalje izpolnjena neenačba* (*slika* 21)*:*

$$\left|a_{n_0} - a\right| < \varepsilon \tag{3.04}$$

Grafično:

Slika 23: $\varepsilon -$ okolica limite *a*

Definicija: *Zaporedje se imenuje* ***fundamentalno*** *(ali* ***Cauchyjevo****), če se v njem katerakoli dva zadosti pozna člena ločita tako malo, kot hočemo. To pomeni, da za poljuben pozitiven ε obstaja tak indeks $n(\varepsilon)$, da je za vsako naravno števill p izpolnjena neenačba*

$$\left| a_{n+p} - a_n \right| < \varepsilon \tag{3.05}$$

Brez dokazov povejmo naslednje izreke, ki govorijo o konvergentnosti:

Izrek 1: *Zaporedje je konvergentno tedaj in le tedaj, če je na obe strani omejeno in ima eno samo stekališče.*

Izrek 2: *Vsako omejeno in monotono zaporedje je konvergentno. Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Izrek 3: *Zaporedje je konvergentno natanko takrat, ko je fundamentalno.*

3.2 Limite in računanje z limitami

Izrek 4: *Vzemimo konvergentno zaporedje $\{a_n\}$ z limito a in poljubno od nič različno realno število k. Tedaj velja*

$$\lim_{n\to\infty} (ka_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = k\, a \tag{3.06}$$

Dokaz:
Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji limite obstaja takšen indeks $n_0 = n_0(\varepsilon)$, da je za vsak $n > n_0$ izpolnjena neenačba $\left| a_n - a \right| < \frac{\varepsilon}{|k|}$. Po drugi strani velja $|ka_n - ka| = |k| \cdot |a_n - a|$. V to enačbo vstavimo zgornjo neenačbo in dobimo $|ka_n - ka| < |k| \, \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$. Ugotovili smo, da je pri dovolj velikem indeksu *n* razlika $|ka_n - ka|$ poljubno majhna, to pa pomeni, da (3.06) res velja.
S tem je izrek dokazan.

Izrek 5: *Vzemimo dve konvergentni zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$, tako da velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Če seštevamo, odštevamo in množimo člene z enakim indeksom v zaporedjih $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$, dobimo tri nova zaporedja*

$$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\dots,\ a_n+b_n,\dots \tag{3.07}$$
$$a_1-b_1,\ a_2-b_2,\dots,\ a_n-b_n,\dots \tag{3.08}$$
$$a_1 b_1,\ a_2 b_2,\dots,\ a_n b_n,\dots \tag{3.09}$$

Kadar so vsi členi zaporedja $\{b_n\}$ *od nič različni, smemo z njimi tudi deliti in tedaj dobimo še zaporedje*

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\dots,\ \frac{a_n}{b_n},\dots \tag{3.10}$$

Označimo nova zaporedja po vrsti krajše: $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_n\,b_n\}$ *in* $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$.

Za ta nova zaporedja veljajo relacije

a) $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=a+b \tag{3.11}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=a-b \tag{3.12}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\,b \tag{3.13}$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b},\quad b\neq 0 \tag{3.14}$$

Dokaz:

Dokažimo prvo lastnost zaporedij, dokazi ostalih potekajo podobno.

Formula $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$ bo veljala, če za vsak pozitiven ε pri vseh dovolj velikih indeksih n velja neenačba $|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$.

Ker sta zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ po predpostavki konvergentni, sta pri predpisanem pozitivnem številu ε za vse dovolj velike n gotovo izpolnjeni neenačbi $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ in $|b_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Od tod dobimo $|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|\le|a_n-a|+|b_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Torej je res $|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$.

S tem je trditev (3.11) dokazana.

Limite zaporedij računamo tako, da upoštevamo zgornje relacije, poznati pa moramo še limite nekaterih preprostih zaporedij.

Za začetek vzemimo konstantno zaporedje, to je zaporedje, v katerem so vsi členi enaki, torej je $a_n = C$. Zaporedje se glasi: $C, C, \ldots, C, \ldots$ Členi se stekajo v točki C, ki je seveda edino stekališče in s tem limita:

$$\lim_{n\to\infty} C = C \tag{3.15}$$

Zaporedje $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ je padajoče z edinim stekališčem 0. Ker je splošni člen tega zaporedja $a_n = \frac{1}{n}$, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{3.16}$$

Zaporedja s splošnimi členi $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{n^3}$ itd., se stekajo proti nič še hitreje kot prejšnje zaporedje, zato gotovo velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0,\ r > 0 \tag{3.17}$$

Sedaj pa že lahko izračunamo marsikatero limito. Oglejmo si nekaj primerov.

Primer:

Izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 5}{n^2 + 2n}$.

Rešitev:

Najprej bomo splošni člen zapisali v drugi obliki. Izpostavimo v števcu in imenovalcu najvišjo potenco indeksa n in jo pokrajšajmo

$$a_n = \frac{2n^2 - 3n + 5}{n^2 + 2n} = \frac{n^2\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}}$$

Upoštevajmo formule (3.11) - (3.17) in dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{n^2 + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{2 - 3\cdot 0 + 5\cdot 0}{1 + 2\cdot 0} = \frac{2}{1} = 2$$

♦ ♦ ♦

Primer:

Izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom $a_n = \dfrac{4n^3 + 12n^2 - 10}{5n^2 - 2n + 5}$.

Rešitev:

V števcu in imenovalcu bomo izpostavili najvišjo potenco n, ki v splošnem členu nastopa, to je n^3, ter jo pokrajšali

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3 + 12n^2 - 10}{5n^2 - 2n + 5} = \lim_{n\to\infty}\frac{4 + \frac{12}{n} - \frac{10}{n^2}}{\frac{5^2}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \frac{4 + 0 - 0}{0 - 0 + 0} = \frac{4}{0} = \infty$$

Zaporedje nima limite, gre za divergentno zaporedje.

♦ ♦ ♦

Primer:

Izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom $a_n = \dfrac{100n + \sqrt[3]{n} + 1}{3n^2\sqrt{n} + 7n - 1}$.

Rešitev:

Števec in imenovalec bomo delili z $n^2\sqrt{n} = n^{\frac{5}{2}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{100n + \sqrt[3]{n} + 1}{3n^2\sqrt{n} + 7n - 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{100}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{13}{6}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}}{3 + \frac{7}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}} = \frac{0 + 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{0}{3} = 0$$

♦ ♦ ♦

Primer:

Izračunajmo še limito zaporedja s splošnim členom $a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$.

Rešitev:

V tem primeru bomo splošni člen zapisali v obliki kvocienta

$$a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 3n} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2 + 3n} + n\right)} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

Števec in imenovalec delimo z $n = \sqrt{n^2}$ in dobimo

$$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{3}{2}$$

♦ ♦ ♦

3.3 Nekatera posebna zaporedja

V tem poglavju bomo spoznali tri posebna zaporedja, ki so matematična osnova obrestnega računa, kar bomo videli v nadaljevanju.

3.3.1 Aritmetično zaporedje

Definicija: *Zaporedje se imenuje **aritmetično,** če je razlika (diferenca) med katerim koli členom in njegovim predhodnikom konstantna:*

$$a_{n+1} - a_n = d \tag{3.18}$$

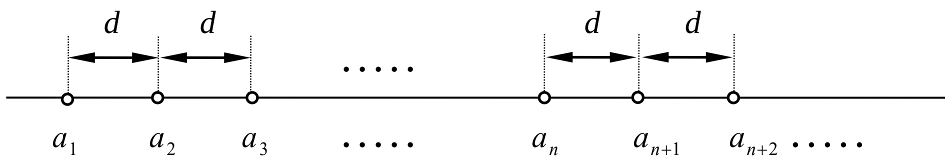
Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= d \Rightarrow a_2 = a_1 + d \\
a_3 - a_2 &= d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \\
a_4 - a_3 &= d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \\
a_5 - a_4 &= d \Rightarrow a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Iz zgornjega vidimo, da splošni člen aritmetičnega zaporedja torej lahko zapišemo s prvim členom in diferenco:

$$a_n = a_1 + (n-1)\ d \tag{3.19}$$

Grafični prikaz aritmetičnega zaporedja je na sliki 24.



Slika 24: Aritmetično zaporedje

Členi aritmetičnega zaporedja so na številski premici med seboj enako oddaljeni.
Ko je $d > 0$, je zaporedje naraščajoče in navzgor neomejeno.
Ko je $d < 0$, je aritmetično zaporedje padajoče in navzdol neomejeno.
V obeh primerih aritmetično zaporedje ni konvergentno.
Aritmetično zaporedje je konvergentno le, ko je $d = 0$. V tem primeru so vsi členi kar enaki prvemu členu a_1, ki je hkrati tudi edino stekališče oz. limita tega zaporedja.

Označimo z S_n vsoto (vseh) prvih *n* členov zaporedja, torej

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{3.20}$$

Seštevanje *n* zaporednih členov zaporedja je pri velikih *n* zamudno in tudi nesmiselno, zato bomo izpeljali formulo za računanje vsote S_n. Zapišimo S_n dvakrat, enkrat od prvega sumanda do zadnjega, drugič pa v obrnjenem vrstnem redu in obe vsoti seštejmo:

$$\left.\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ \dots \ + (a_1 + (n-1)d) \\ S_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ \dots \ + (a_n - (n-1)d) \end{aligned}\right\} +$$

Večkratniki diference se paroma odštejejo, tako da je

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ \cdots \ + (a_1 + a_n)}_{n-\text{krat}}$$

in od tod že dobimo zelo koristno formulo:

$$S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2} \tag{3.21}$$

<u>Primer:</u>
Izmed prvih 100 naravnih števil seštejmo vsa liha števila.

<u>Rešitev:</u>
Liha števila, ki jih želimo sešteti, so: 1, 3, 5, 7, . . . , 99. Vidimo, da gre za aritmetično zaporedje, kjer je $a_1 = 1$ in $d = 2$. Med prvimi 100 naravnimi števili je pol lihih in pol sodih, torej seštevamo 50 prvih lihih števil.

Vsota 50 členov tega zaporedja $S_{50} = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ je po formuli (3.21):

$$S_{50} = \frac{50 \cdot (1 + 99)}{2} = 2500$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Izračunajmo prvi člen in diferenco aritmetičnega zaporedja, za katere velja: $a_2 + a_3 + a_5 = 20$ in $a_1 \, a_4 = 16$.

Rešitev:
Ker smemo poljubni člen aritmetičnega zaporedja zapisati s prvim členom in diferenco, bomo zgornji sistem enačb zapisali

$$\begin{aligned} &(a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 20 \\ &a_1 \, (a_1 + 3d) = 16 \end{aligned}$$

Enačbi uredimo in dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$\begin{aligned} &3a_1 + 7d = 20 \\ &a_1^2 + 3a_1 \, d = 16 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $d = \dfrac{20 - 3a_1}{7}$, to vstavimo v drugo enačbo in uredimo ter dobimo kvadratno enačbo

$$a_1^2 - 30a_1 + 56 = 0$$

Njeni rešitvi sta: $a_1 = 2$ in $a_1 = 28$.

Pogojem iz naloge torej ustrezata dve aritmetični zaporedji:

I. $a_1 = 2$, $d = 2$; zaporedje se glasi: $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10, \ldots$

II. $a_1 = 28$, $d = -\dfrac{64}{7}$; zaporedje se glasi: $28,\ \dfrac{132}{7},\ \dfrac{68}{7},\ \dfrac{4}{7},\ -\dfrac{60}{7},\ \ldots$

♦ ♦ ♦

3.3.2 Geometrično zaporedje

Definicija: *Zaporedje se imenuje **geometrično**, če je količnik (kvocient) med katerim koli členom in njegovim predhodnikom konstanten:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \tag{3.22}$$

Od tod

$$\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1\, q$$
$$\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_3 = a_2\, q = a_1\, q^2$$
$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3\, q = a_1\, q^3$$
$$\frac{a_5}{a_4} = q \Rightarrow a_5 = a_4 q = a_1 q^4$$
$$\cdots$$

in splošno

$$a_n = a_1\, q^{n-1} \tag{3.23}$$

Poljubni člen geometričnega zaporedja lahko izrazimo s prvim členom in kvocientom.

Glede na vrednost konstante q nastopajo pri geometričnih zaporedjih v splošnem tri možnosti $|\,q\,|<1$, $|\,q\,|=1$ in $|\,q\,|>1$. V prvem primeru je geometrično zaporedje padajoče, v drugem je konstantno, v tretjem primeru pa je naraščajoče. Brez težav lahko ugotovimo, da je geometrično zaporedje konvergentno za vse vrednosti $|\,q\,|<1$ ter tudi za $q=1$. Za vse vrednosti $|\,q\,|>1$ in za $q=-1$ pa je geometrično zaporedje divergentno.

Vsoto prvih *n* členov geometričnega zaporedja dobimo tako, da enačbo

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

pomnožimo s q in jo odštejemo od prvotne enačbe:

$$\left.\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ qS_n &= a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n \end{aligned}\right\} \quad -$$

Na ta način dobimo:

$$S_n\,(1-q)=a_1-a_1\,q^n$$

in od tod

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}\;,\;q\neq 1 \tag{3.24}$$

Kadar je $q=1$, se zaporedje glasi $a_1\,,a_1\,,a_1\,,\;\ldots\;,a_1,\;\ldots$ in vsota prvih n členov je seveda kar enaka $S_n=n\,a_1$.

Opomba:
Če v formuli (3.24) števec in imenovalec pomnožimo z (-1), jo lahko zapišemo tudi v tej obliki:

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1},\;\;q\neq 1 \tag{3.24a}$$

Primer:
Zapišimo prvi člen in kvocient geometričnega zaporedja, za katerega je $a_2=\frac{1}{3}$ in $a_1+a_3=\frac{10}{9}$.

Rešitev:
Ko upoštevamo $a_2=a_1\,q$ in $a_3=a_1\,q^2$, dobimo iz zgornjih pogojev sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$a_1\,q=\frac{1}{3}$$

$$a_1\left(1+q^2\right)=\frac{10}{9}$$

Iz prve enačbe izrazimo $a_1=\frac{1}{3q}$ in to vstavimo v drugo enačbo:

$$\frac{1}{3q}\left(1+q^2\right)=\frac{10}{9}$$

Uredimo in dobimo kvadratno enačbo za q :

$$3q^2-10q+3=0\;\;\Rightarrow q_1=3\,,\qquad q_2=\frac{1}{3}$$

Imamo torej dve rešitvi:

I. $q=3$, $a_1=\frac{1}{9}$ II. $q=\frac{1}{3}$, $a_1=1$

Zaporedji imata enake prve tri člene v zamenjanem vrstnem redu:

1. zaporedje: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$ 2. zaporedje: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

♦♦♦

Primer:

Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n=\frac{\alpha}{3^{n-1}}$, $\alpha=\text{konst.}$ Pokažimo, da je to zaporedje geometrično.

Rešitev:

Po definiciji je zaporedje geometrično, če je količnik med katerim koli členom in njegovim predhodnikom konstanten. Izračunajmo ta količnik za naše zaporedje:

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{\alpha}{3^{(n+1)-1}}}{\frac{\alpha}{3^{n-1}}}=\frac{3^{n-1}}{3^{(n+1)-1}}=\frac{1}{3}$$

Količnik je konstanten, zato je to zaporedje geometrično.

♦♦♦

3.3.3 Število e

Oglejmo si dve posebni zaporedji s splošnima členoma $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ in $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Definicija: *Obe zaporedji sta konvergentni in imata isto limito. Ta limita je število, ki ga označimo s črko e.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e \tag{3.25}$$

Opomba:

Število e je osnova naravnih logaritmov. Je iracionalno število, njegov približek je $e\approx 2{,}7182818284590\ldots$.

Primer:

Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}=e^{-1}$$

Primer:

Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$

Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n/3)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(n/3)}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3$$

Označimo $\dfrac{n}{3}=t$. Ko gre $n\to\infty$, gre tudi $t\to\infty$ in limita bo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(n/3)}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^3=e^3$$

Primer:

Izračunajmo še $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{10}{n}\right)^{n+5}$

Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{10}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{10}{n}\right)^5\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n/10)}\right)^n\cdot\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}\right)^5=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n/10)}\right)^{\frac{n}{10}\cdot 10}\cdot\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}\right)^5=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{10}\cdot\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n}\right)^5=e^{10}\,(1+0)^5=e^{10}$$

♦ ♦ ♦

3.4 Vrste

Vzemimo zaporedje realnih števil $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_n,\ \dots$ ter z znakom + povežimo vse člene tega zaporedja. Dobljeni izraz $a_1 +\ a_2 +\ \cdots +\ a_n +\ \cdots$ imenujemo ***(številska) vrsta***. Števila $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_n,\ \dots$ so njeni ***členi***. Vrste označujemo z uporabo sumacijskega simbola $\sum$ ("sigma"):

$$a_1 +\ a_2 +\ \cdots +\ a_n +\ \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{3.26}$$

Kadar seštevamo končno mnogo realnih števil, je vsota vedno neko natanko določeno realno število. Vrsti, ki ima neskončno mnogo členov, pa je možno prirediti neko realno število kot *vsoto vrste* le včasih. Vsoto vrste lahko včasih izračunamo, včasih pa ne. Ko poskušamo dobiti vsoto vrste, seštevamo zaporedoma vse več členov vrste. Na ta način dobimo natanko določena realna števila

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1 + a_2\\
&\dots\dots\dots\\
&s_n = a_1 +\ a_2 +\ \cdots +\ a_n\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

ki jih imenujemo ***delne vsote*** vrste.

Delne vsote vrste tvorijo *zaporedje delnih vsot* : $s_1\ ,\ s_2,\ \dots\ ,\ s_n,\ \dots.$

Definicija: *Kadar je zaporedje delnih vsot konvergentno, se tudi vrsta imenuje* ***konvergentna****. Ko je zaporedje delnih vsot divergentno, se tudi vrsta imenuje* ***divergentna****. Ko limita zaporedja delnih vsot*

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{3.27}$$

obstaja, se imenuje ***vsota (vrednost)*** *vrste* $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Primer:

Ugotovimo vrednost vrste $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} + \ \cdots$

Rešitev:
Najprej moramo ugotoviti, kako bi zapisali splošni člen vrste. Iz oblike členov sklepamo, da je splošni člen $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, kar lahko napišemo kot vsoto dveh (parcialnih) ulomkov:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}$$

Gornjo enačbo pomnožimo s skupnim imenovalcem in jo uredimo. S primerjavo koeficientov pri enakih potencah n na levi in desni strani enačbe dobimo dve enačbi z dvema neznankama

$$3A + 3B = 0$$
$$A - 2B = 1$$

z rešitvijo $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$

Ko imamo znani števili A in B, lahko splošni člen vrste zapišemo v obliki

$$a_n = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} = \frac{\frac{1}{3}}{3n-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

Zaradi $a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$ bo zaporedje delnih vsot takšno:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right)$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$$

....

....

$$s_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

V izrazu za n-to delno vsoto se medsebojno odštejejo vsi členi razen prvega in zadnjega, tako da je $s_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$.

Po definiciji je vsota vrste limita zaporedja delnih vsot

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

Vrsta je konvergenta, njena vsota je $1/3$.

♦ ♦ ♦

Definicija: *Vrsta se imenuje **alternirajoča,** ko členi zaporedoma spreminjajo predznak, torej je tedaj produkt dveh zaporednih členov vrste vedno negativen:* $a_{n+1}\, a_n < 0$.

Če v alternirajoči vrsti absolutne vrednosti členov padajo in imajo limito 0, je vrsta konvergentna.

Primer:

V alternirajoči vrsti $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ absolutne vrednosti členov padajo in konvergirajo proti 0, zato je vrsta konvergentna.

♦ ♦ ♦

Brez dokazov povejmo naslednje izreke:

Izrek 1 (Cauchyjev kriterij): *Vrsta* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *je konvergentna natanko takrat, kadar za vsako pozitivno število* ε *obstaja tako naravno število* $n(\varepsilon)$, *da za kateri koli* $n \ge n(\varepsilon)$ *in za vsako naravno število p velja:*

$$\left| \; a_{n+1} + \; a_{n+2} + \cdots + \; a_{n+p} \right| < \varepsilon \tag{3.28}$$

Izrek 2: *Če je vrsta* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *konvergentna, je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Izrek 3: *Naj bo* $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$ *konvergentna vrsta z nenegativnimi členi. Če so členi vrste* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ *takšni, da velja* $|a_n| \le b_n$, *za* $n = 1, 2, 3, \ldots,$ *je tudi vrsta* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ *konvergentna.*

Izrek 4 *(D'Alembertov kriterij)*: *Naj bo* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ *vrsta s samimi pozitivnimi členi taka, da obstaja limita:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. *Če je* $a < 1$, *je vrsta konvergentna, če pa je* $a > 1$, *je vrsta divergentna.*

Izrek 5: *Če je konvergentna vrsta iz absolutnih vrednosti členov dane vrste, je tudi dana vrsta konvergentna.*

Primer:

Z D´Alembertovim kriterijem preverimo, ali je vrsta $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \cdots$ konvergentna.

Rešitev:

Iz oblike členov vrste najprej ugotovimo splošni člen vrste $a_n = \frac{2n}{3^n}$. Od tod je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{2n}{3^n}} = \frac{2(n+1)\ \cdot 3^n}{2n\ \cdot\ 3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n}$$

in

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$

Vrsta je konvergentna.

♦ ♦ ♦

Definicija: *Vzemimo geometrično zaporedje s prvim členom* a_1 *in kvocientom q ter iz njega tvorimo vrsto*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots = a_1 \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \tag{3.29}$$

Tako dobljeni vrsti bomo rekli ***geometrična vrsta****.*

Kot pri vsaki vrsti, bomo tudi pri geometrični vrsti njeno vsoto ugotavljali s pomočjo zaporedja delnih vsot:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1 + a_1 q = a_1(1+q)\\
&s_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = a_1(1+q+q^2)\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\\
&s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Splošni člen s_n zaporedja delnih vsot je vsota prvih n členov geometrične vrste s kvocientom q :

$$s_n = a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Od tod

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^n)$$

Za $|\,q\,| \geq 1$ limita ne obstaja, za $|\,q\,| < 1$ pa je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ in geometrična vrsta je konvergentna ter ima končno vsoto:

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad |q| < 1 \tag{3.30}$$

Primer:

Izračunajmo vsoto geometrične vrste $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

Rešitev:

Očitno gre za geometrično vrsto s prvim členom $a_1 = 1$ in kvocientom $q = \frac{1}{2}$. Ker je kvocient manjši od 1, je vrsta konvergentna, njena vsota pa je po formuli (3.30)

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

♦ ♦ ♦

Naloge

1. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$. Izračunaj limito zaporedja in ugotovi, od katerega člena dalje se vsi členi ločijo od limite manj kot za 0,01.

2. Zapiši splošne člene zaporedij:
   a) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ c) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$
   d) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ e) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$ f) $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$

3. Pokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n+1}{2n}$ padajoče in na obe strani omejeno. Izračunaj njegovo največjo spodnjo mejo in največjo zgornjo mejo!

4. Ali je število $\frac{6}{7}$ člen zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{n}{n+1}$? Koliko členov tega zaporedja leži na intervalu $\left[\frac{3}{4}, \frac{10}{11}\right]$?

5. Izračunaj limite zaporedij s splošnimi členi:
   a) $a_n = \frac{3n^2-7}{n^2+n+1}$ b) $a_n = \frac{7+n-2n^2}{n^2+n+1}$ c) $a_n = \frac{3n^2\sqrt{n}+7n}{100n^2+n+1}$
   d) $a_n = 3\cdot\frac{n^2+2n-1}{15n^2-15n-1}$ e) $a_n = \frac{-12}{\sqrt{n}+1}$ f) $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n}+1}{n+1}$
   g) $a_n = n-\sqrt{n^2-2n-4}$ h) $a_n = 2n-\sqrt{4n^2+2}$ i) $a_n = \sqrt{n^2+2}-n$
   j) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ k) $a_n = \left(1-\frac{2}{5n}\right)^n$ l) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}$
   m) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2-n}$ n) $a_n = \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ o) $a_n = \frac{(n-1)!}{n!+(n-1)!}$
   p) $a_n = \frac{2n!}{(n-1)!-n!}$

6. Dokaži lastnosti limite:
   a) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n + \lim_{n\to\infty}b_n$
   b) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n - \lim_{n\to\infty}b_n$
   c) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n$

7. Izračunaj prve štiri člene aritmetičnega zaporedja, za katerega velja:
   $a_1 + a_4 = 5$ in $a_1 a_2 = 2$.

8. Izračunaj prve štiri člene aritmetičnega zaporedja, za katerega velja:
   $a_2 + a_4 = -4$ in $a_1 a_3 = -4$.

9. Izračunaj prve štiri člene geometričnega zaporedja, za katerega velja:
   $a_1 + a_4 = \frac{9}{8}$ in $a_2 a_3 = \frac{1}{8}$.

10. Izračunaj vsoto prvih štirih členov geometričnega zaporedja, za katerega velja:
   $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}$ in $a_1 a_3 = 1$.

11. V geometričnem zaporedju je produkt prvega in osmega člena 4374, vsota četrtega in petega člena pa je 135. Izračunaj vsoto prvih osmih členov!

12. Če prištejemo štirim zaporednim členom aritmetičnega zaporedja po vrsti 1, 8, 35 in 122, dobimo štiri števila, ki tvorijo geometrično zaporedje. Napiši obe zaporedji!

13. Pokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \lambda \cdot 5^{1-n}$, $\lambda =$ konst., geometrično!

14. Svetlobni žarek izgubi pri prehodu skozi steklo 10% svoje energije. Koliko energije izgubi pri prehodu skozi 10 takšnih steklenih plošč, če zanemarimo odboj?

15. Ugotovi konvergenco vrste:
   a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \cdots$ b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \frac{8}{3^4} + \frac{10}{3^5} + \cdots$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

16. Izračunaj vsoto vrste
   a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$ b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+2)(i+3)}$

17. Dokaži, da je vrsta $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$ konvergentna in izračunaj njeno vsoto!

18. Ugotovi, ali je konvergentna vrsta :
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \cdots$$

19. Z uporabo Cauchyjevega kriterija ugotovi, ali konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}$.

20. Ali so konvergentne naslednje vrste:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{3k+1}\right)^k$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{e^k}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$ e) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$ f) $\sum_{t=1}^{\infty} \sqrt{\frac{t}{t^4+1}}$

Rešitve

1. $a = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$

$\left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < 0{,}01$ oz. $\left| \frac{-5}{n+3} \right| < \frac{1}{100}$

Od tod $\frac{5}{n+3} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 497$. Znotraj 0,01-okolice limite so členi od vključno 498-tega dalje.

2. a) $a_n = \frac{n+1}{n}$ b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n-1}{n}$

d) $a_n = 2n-1$ e) $a_n = n^2+1$ f) $a_n = n^2-1$

3. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{2}{4n^2+6n+2} < 1 \Rightarrow$ zaporedje je padajoče, $m = 1$, $M = \frac{3}{2}$

4. $n = 6$. Na intervalu leži 8 členov: $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ in a_{10}.

5. a) 3 b) –2 c) ∞ d) $\frac{1}{5}$ e) 0 f) 0 g) 1 h) 0 i) 0 j) e^2

k) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{5n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{5n}{2}\right)}\right)^{\left(-\frac{5n}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)} = e^{-\frac{2}{5}}$

l) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\right] = e$ m) e^2

n) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{(n-1)!\,n\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0$ o) 0 p) -2

7. I. $a_1 = 1$, $d = 1 \Rightarrow 1, 2, 3, 4$

II. $a_1 = -6$, $d = 17/3 \Rightarrow -6, -1/3, 16/3, 11$

8. $a_1 = 2, \quad d = -2 \Rightarrow 2, 0, -2, -4$

9. I. $a_1 = \frac{1}{8}, \quad q = 2 \Rightarrow$ iskana števila: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$

II. $a_1 = 1, \quad q = \frac{1}{2} \Rightarrow$ iskana števila: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

10. I. $a_1 = 2, q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_4 = \frac{15}{4}$ II. $a_1 = \frac{1}{2}, q = 2 \Rightarrow S_4 = \frac{15}{2}$

III. $a_1 = 2, q = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_4 = \frac{5}{4}$ IV. $a_1 = \frac{1}{2}, q = -2 \Rightarrow S_4 = -\frac{5}{2}$

11. $S_8 = \frac{6305}{8}$

12. Členi aritm. z. so: 4, 7, 10 in 13, členi geom. z. so: 5, 15, 45 135.

14. $\approx 65\%$.

15. a) Zaporedje delnih vsot $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{7}{6}$, $s_3 = \frac{23}{12}$, $s_4 = \frac{163}{60}$, **...** je naraščajoče in navzgor ni omejeno, zato vrsta ni konvergentna.

b) D'Alembertov kriterij: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{2n}{3^n}} = \frac{2n+2}{6n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{6n} = \frac{1}{3}$

Ker je zgornja limita manjša od 1, je vrsta konvergentna.

c) Ni.

16. a) $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) =$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots = 1$$

b) $S = \frac{1}{3}$

17. $S = \frac{1}{2}$

18. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.

19. Vrsta je konvergentna.

20. a) ne b) ne c) da d) da e) ne f) da

4 ZAPOREDJA V POSLOVNI MATEMATIKI

4.1 Indeksi

Definicija: ***Indeksi*** *so števila, ki kažejo odnose med vrednostmi, s katerimi merimo različne pojave. Ti odnosi so najbolj nazorni in predstavljivi, ko vse vrednosti primerjamo z neko dogovorjeno in znano vrednostjo pojava. Tej vrednosti pravimo* ***osnova*** *ali* ***baza*** *primerjanja.*

Naj bo S_0 , S_1 , S_2 , … , S_n , … zaporedje numerično izraženih vrednosti nekega pojava. Vsaki od teh vrednosti lahko priredimo indeks I_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Odnose primerjanja (indekse) bomo najenostavneje merili tako, da bomo osnovi predpisali indeks 100, razmerja pa se nato izražajo podobno kot pri procentnem računu.

Vzemimo za osnovo primerjanja kar prvi podatek S_0, ki mu predpišemo indeks 100. Ostale indekse I_k, $k = 1, 2, \ldots$, ki pripadajo vrednostim S_k , $k = 1, 2, 3, \ldots$, izračunamo iz sorazmerja

$$S_k : S_0 = I_k : 100$$

od koder je

$$I_k = \frac{S_k}{S_0} \cdot 100, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.01}$$

Zaporedju S_0 , S_1 , S_2 , … , S_n , … smo na ta način priredili ***zaporedje indeksov s stalno osnovo*** (4.01).

Vidimo, da lahko pri proučevanju nekega pojava namesto absolutnih numeričnih vrednosti S_k , $k = 1, 2, 3, \ldots$ uporabimo tudi pripadajoče relativne vrednosti, to je indekse I_k za vsak $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Primer:
V naselju X se je od leta 2010 do 2018 število prebivalcev gibalo tako, kot kaže tabela:

leto	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
št. prebiv.	1300	1350	1380	1400	1410	1405	1430	1440	1455

Gibanje števila prebivalstva v tem naselju lahko prikažemo tudi z relativnimi vrednostmi - indeksi. Vzemimo za osnovo primerjanja število iz leta 2010.
Indekse s stalno osnovo izračunamo po obrazcu (4.01):

$$I_k = \frac{S_k}{S_0} \cdot 100 \;, \quad \text{za vse } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Od tod dobimo zaporedje pripadajočih indeksov s stalno osnovo:

leto	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
indeks	100	103,8	106,2	107,9	108,6	108,1	110,0	110,8	111,9

To pomeni, da je bilo leta 2011 prebivalcev za 3,8% več kot leta 2010, leta 2012 za 6,2% več kot leta 2010, leta 2013 za 7,9% več kot leta 2010 itd.
♦ ♦ ♦

Pri računanju indeksov pa lahko osnovo tudi spreminjamo - tedaj govorimo o ***indeksih s premično osnovo***. Med takšnimi so posebej uporabni ***verižni indeksi*** $I_k^{(v)}$, ki so definirani s sorazmerjem

$$S_k : S_{k-1} = I_k^{(v)} : 100$$

od koder sledi

$$I_k^{(v)} = \frac{S_k}{S_{k-1}} \cdot 100 \;, \; k = 1, 2, 3 \;, \; \ldots \qquad (4.02)$$

Verižni indeksi torej kažejo relativno mero primerjanja dveh sosednih členov v zaporedju $S_0 \;, \; S_1 \;, \; S_2 \;, \; \ldots \;, \; S_n \;, \; \ldots.$

Opomba:
Prvi člen v zaporedju seveda nima verižnega indeksa, ker pred njim ne stoji noben podatek in ga torej ne moremo primerjati z ničemer.

Primer:
Na osnovi tabele gibanja prebivalcev v naselju X izračunajmo pripadajoče verižne indekse.

leto	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
št. prebival.	1300	1350	1380	1400	1410	1405	1430	1440	1455

Tabela verižnih indeksov:

leto	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ver. ind.	-	103,8	102,2	101,4	100,7	99,6	101,8	100,7	101,0

To pomeni, da se je število prebivalcev leta 2011 povečalo za 3,8% glede na leto 2010, leta 2012 se je povečalo za 2,2% glede na leto 2011, leta 2013 se je povečalo za 1,4% glede na leto 2012, leta 2014 se je povečalo za 0,7% glede na leto 2013, leta 2015 se je zmanjšalo za 0,4% glede na leto 2014 itd.
♦ ♦ ♦

Členi zaporedja S_0 , S_1 , S_2 , … , S_n , … naj pomenijo vrednosti nekega pojava v enako dolgih časovnih intervalih, npr. letno stanje prebivalcev nekega območja, mesečno proizvodnjo v podjetju, polletno število prodanih knjig, letni dobiček podjetja itd. V takšnem primeru pravimo, da ti podatki tvorijo ***časovno vrsto***.

Zaporedje S_0 , S_1 , S_2 , … , S_n , … je seveda odvisno od konkretnega merjenega pojava, vendar je v nekaterih posebnih primerih lahko aritmetično ali geometrično.

Poglejmo si ti dve idealni možnosti.

1. Ko je zaporedje S_0 , S_1 , S_2 , … , S_n , … *aritmetično,* torej ko velja

$$S_k - S_{k-1} = d \,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.03}$$

tudi pripadajoči indeksi s stalno osnovo tvorijo aritmetično zaporedje, saj je

$$I_k - I_{k-1} = \frac{S_k}{S_0} \cdot 100 - \frac{S_{k-1}}{S_0} \cdot 100 = \frac{100}{S_0}\left(S_k - S_{k-1}\right) = \frac{100}{S_0} d = d_1, \;\; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.04}$$

Kadar je $d > 0$ (oziroma s tem tudi $d_1 > 0$), pravimo, da vrednosti pojava naraščajo po aritmetičnem zaporedju ali ***linearno***, kadar pa je $d < 0$ (in hkrati tudi $d_1 < 0$), pa te vrednosti padajo linearno.

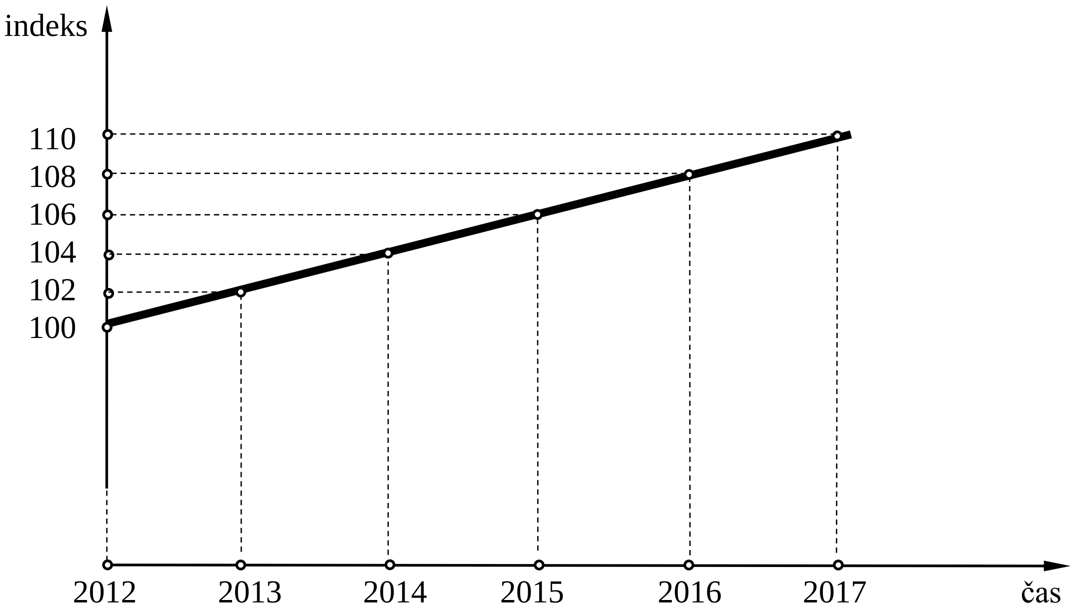
Primer:
V tovarni je proizvodnja izdelkov naraščala tako, kot kaže tabela:

leto	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Proizvodnja (komadi)	50 000	51 000	52 000	53 000	54 000	55 000

Pripadajoča tabela indeksov s stalno osnovo ($S_0 = 50.000$ kosov leta 2012):

leto	2012	2013	2014	2015	2016	2017
ind. s stalno osn.	100	102,0	104,0	106,0	108,0	110,0

Zaporedje absolutnih vrednosti in zaporedje indeksov tvorita aritmetično zaporedje. Pri prvem je diferenca $d = 1000$, pri drugem pa $d_1 = 2$. Merska enota prvega zaporedja so komadi, merska enota drugega zaporedja so procenti. Obe zaporedji naraščata linearno. Če izberemo pravokotni koordinatni sistem tako, da na vodoravni osi merimo leta, na navpični osi pa pripadajoče vrednosti zaporedja, dobimo točke, ki ležeta na premici. Na sliki 25 vidimo graf indeksov s stalno osnovo. Točke na vodoravni osi (2012, 2013, …) pomenijo konec posameznega leta.



Slika 25: Linearno naraščanje vrednosti pojava

2. Zaporedje S_0, S_1, S_2, … , S_n, … naj bo *geometrično,* tako da velja

$$\frac{S_k}{S_{k-1}} = q\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ \dots \tag{4.05}$$

Pripadajoči indeksi s stalno osnovo (običajno je ta osnova kar S_0) tudi tvorijo geometrično zaporedje z istim kvocientom:

$$\frac{I_k}{I_{k-1}} = \frac{\frac{S_k}{S_0} \cdot 100}{\frac{S_{k-1}}{S_0} \cdot 100} = \frac{S_k}{S_{k-1}} = q , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.06}$$

Kadar je $q > 1$, pravimo, da vrednosti pojava naraščajo po geometričnem zaporedju ali ***eksponentno***, kadar pa je $0 < q < 1$, te vrednosti padajo eksponentno.

Pri eksponentnem padanju ali naraščanju vrednosti nekega pojava so vsi verižni indeksi med seboj enaki, saj iz (4.02) in (4.06) takoj ugotovimo:

$$I_k^{(v)} = \frac{S_k}{S_{k-1}} \cdot 100 = q \cdot 100 , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Primer:
V šolski knjižnici se je število izposojenih knjig spreminjalo tako, kot kaže tabela:

leto	2012	20013	2014	2015	2016	2017
izpos. knj. (kom.)	3 000	3 180	3 371	3 573	3 787	4 015

Brez težav ugotovimo, da število izposojenih knjig v posameznih zaporednih letih tvori geometrično zaporedje s kvocientom $q = 1,06$.

Pripadajoča tabela indeksov s stalno osnovo ($S_0 = 3.000$ knjig leta 2006):

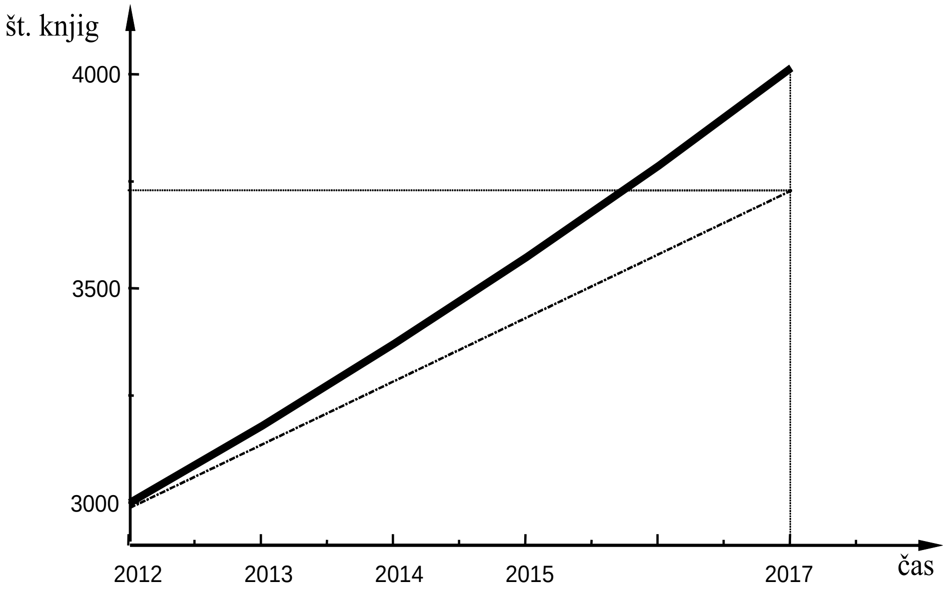
leto	2012	2013	2014	2015	2016	2017
ind. s st. osnovo	100	106,0	112,4	119,1	126,2	133,8

Indeksi s premično osnovo pa so med seboj enaki:

leto	2012	2013	2014	2015	2016	2017
verižni indeksi	-	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0

Na sliki 26 je z debelo črto narisan graf, ki prikazuje eksponentno naraščanje števila izposojenih knjig po podatkih iz tabele. Za primerjavo je narisana premica, ki kaže linearno naraščanje.

Na abscisni osi pomenijo: točka 2012 konec leta 2012, točka 2013 konec leta 2013 itd.



Slika 26: Eksponentno naraščanje števila izposojenih knjig

♦ ♦ ♦

4.2 Obrestni račun

Pri obrestnem (in kasneje pri obrestno obrestnem) računu imamo opraviti z naslednjimi osnovnimi pojmi:

Glavnica (običajno jo označimo s črko *G*) je (iz)posojeni znesek denarja. Merimo jo v denarnih enotah, npr. USD , JPY, EUR itd.

Kreditodajalec je fizična ali pravna oseba, ki denar posodi fizični ali pravni osebi. Vlogo kreditodajalca bomo pripisali tudi osebi, ki ima denar na banki (knjižica, tekoči račun, žiro račun).

Kreditojemalec je fizična ali pravna oseba, ki si denar izposodi od fizične ali pravne osebe. Vlogo kreditojemalca bomo pripisali tudi banki, ki razpolaga z denarjem svojih strank.

Obresti (označimo jih s črko *o*) so nadomestilo za uporabo glavnice, ki jo je kreditodajalec za določen čas prepustil kreditojemalcu. Merimo jih v denarnih enotah, npr. USD, JPY, EUR itd.

Čas obrestovanja (običajni znak je črka *n*) je čas, za katerega se obračunavajo obresti. Merimo ga v dnevih, mesecih, letih. Čas obrestovanja je v neposredni zvezi tudi s pojmom ***ročnost***. Posojilo je lahko kratkoročno, srednjeročno, pa tudi dolgoročno.

Obrestna mera (znak *p* ali π) je sorazmernostni faktor, ki pove, koliko denarnih enot nadomestila (obresti) plača kreditojemalec kreditodajalcu za vsakih 100 denarnih enot glavnice, vložene za eno dogovorjeno časovno obdobje. To časovno obdobje je največkrat eno leto, tako da najpogosteje govorimo o letni obrestni meri. Enota za obrestno mero je %. Pri podatkih o obrestni meri srečamo tudi oznake, ki povedo, na kakšno časovno obdobje se nanaša obrestna mera. Te oznake so:

- za leto p.a., kar pomeni *per anno,*
- za polletje p.s., kar pomeni *per semestris,*
- za četrtletje p.q., kar pomeni *per quartus,*
- za mesec p.m., kar pomeni *per mese.*

Kapitalizacijska doba je obdobje med dvema zaporednima obračunoma (pripisoma) obresti. Običajna kapitalizacijska doba je eno leto, lahko tudi manj, izjemno redko je daljša.

Kapitalizacija (znak *m*) je število, ki pove, kolikokrat pripišemo obresti v obdobju, za katerega velja dogovorjena obrestna mera *p*. Pri letni obrestni meri in letni kapitalizaciji je $m = 1$, pri letni obrestni meri in polletni kapitalizaciji je $m = 2$, pri letni obrestni meri in mesečni kapitalizaciji je $m = 12$, pri mesečni obrestni meri in mesečni kapitalizaciji je $m = 1$ in podobno.

Dekurzivno obrestovanje je postopek pripisa obresti *po pretečenem* časovnem obdobju, torej "za nazaj". Obresti, ki jih dobimo na ta način, imenujemo dekurzivne, obrestni meri pa pravimo dekurzivna obrestna mera in jo označimo s črko *p*.

Anticipativno obrestovanje je postopek obračunavanja obresti *že na začetku* obrestovalnega obdobja, torej "v naprej". Anticipativne obresti ob začetku obdobja odvzamemo od osnovne glavnice. Anticipativno obrestovanje je smiselno le pri kreditnih poslih. Anticipativno obrestno mero, če do nje pride, označimo z grško črko π.

Primer:
Za leto dni si izposodimo 1000 d.e. (denarnih enot) pri letni obrestni meri 10%. Za enoletno uporabo te glavnice bomo pri dekurzivnem obrestovanju plačali 100 d.e. po preteku enega leta. Če bi bilo obrestovanje anticipativno, bi bile te obresti tudi 100 d.e., vendar bi jih morali plačati takoj ob najetju posojila, tako da bi v resnici dobili le 900 d.e. kapitala.
Obresti so sicer v obeh primerih nominalno enake (100 d.e.), vendar smo pri dekurzivnem obrestovanju lahko uporabili vseh 1000 d.e. kredita, pri anticipativnem obrestovanju pa smo imeli dejansko na razpolago le 900 d.e. kapitala!

Anticipativno obrestovanje je za kreditojemalca manj ugodno (dražje) kot dekurzivno!
♦ ♦ ♦

Reduciranje pomeni preračunavanje nekega zneska na nek določen (dogovorjen) trenutek ali ***termin***.

Znesek ***dospeva*** (***valutira***) na nek termin (trenutek, datum), ko ga je potrebno v računu upoštevati, npr. ko ga je potrebno vrniti.

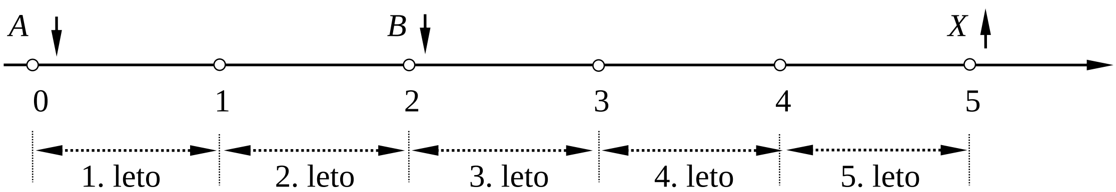
Časovna premica je številska premica, na kateri izbrane točke pomenijo posamezne termine. Zaradi nazornosti problemov obrestnega računa si dogajanja mnogokrat predstavimo grafično na časovni premici.

Obdobje je interval med dvema točkama na časovni premici.

Primer:
Na začetku leta smo vložili znesek *A*, čez dve leti še znesek *B*. Po treh letih od druge vloge dvignemo celoten znesek, ki ga označimo z *X*. Narišimo dogajanje na časovni premici!

Rešitev:
Na številski premici izberemo točke, ki pomenijo začetek 1. leta, začetek 2. leta (to je hkrati konec 1. leta), začetek 3. leta (to je istočasno konec 2. leta) itd. Narišemo toliko točk, kot jih potrebujemo (slika 27). Interval med dvema zaporednima točkama pomeni v tem primeru obdobje enega leta.

Opomba: S puščico $\downarrow$ smo označili vlogo, s puščico $\uparrow$ pa dvig nekega denarnega zneska.

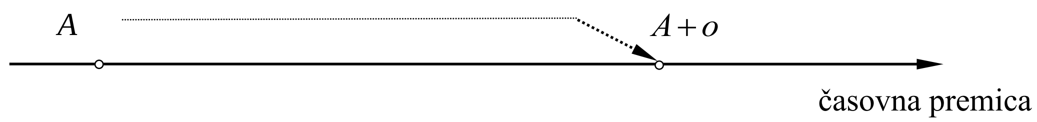


Slika 27: Uporaba časovne premice

♦ ♦ ♦

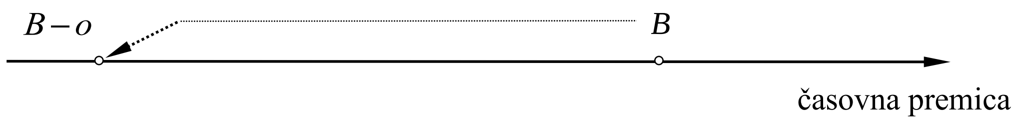
Zneskov, ki dospevajo v različnih trenutkih, ne moremo kar primerjati. Ker pa jih smemo preračunati oz. reducirati na poljuben trenutek, jih naredimo primerljive s tem, da vse preračunamo na ***isti termin***.

Ko znesek reduciramo na termin, ki je kasnejši od njegovega siceršnjega dospetja, mu moramo za to obdobje *prišteti obresti* - pravimo, da znesek ***naobrestimo*** (slika 28).



Slika 28: Znesek *A* naobrestimo

Ko znesek reduciramo na termin, ki je pred njegovim siceršnjim dospetjem, mu moramo za to obdobje *odšteti obresti* - pravimo, da znesek ***razobrestimo*** (slika 29).



Slika 29: Znesek *B* razobrestimo

Med seboj lahko primerjamo le glavnice, ki smo jih reducirali na isti termin. O tem govori **načelo ekvivalence glavnic**, ki se glasi:

Različne glavnice so ekvivalentne (enakovredne), če postanejo po reduciranju pri isti obrestni meri na isti termin enake.

Uporaba načela ekvivalence glavnic nam pomaga, da pri reševanju konkretnih nalog obrestnega računa najprej zapišemo temeljno bilančno enačbo:

VSOTA VSEH VLOG, REDUCIRANIH NA SKUPNI TERMIN =

= VSOTA VSEH DVIGOV, REDUCIRANIH NA ISTI SKUPNI TERMIN

Konkretna oblika te enačbe je seveda za vsak primer drugačna, kar je odvisno od števila in oblike vlog, dvigov, načina obrestovanja ipd. Iz nastavljene enačbe nato izrazimo iskano količino kot neznanko in jo z upoštevanjem podatkov nato še izračunamo. Pri numeričnem računanju si pomagamo s kalkulatorjem.

4.3 Navadni obrestni račun

Pri navadnem obrestnem računu izhajamo iz predpostavke, da ***obresti vsakokrat računamo le od prvotne glavnice.*** Navadno ali enostavno obrestovanje je najpreprostejši način obračunavanja obresti. Običajno se uporablja za obdobja, krajša od enega leta.

Označimo:

G_0 - začetna glavnica
p - obrestna mera v % za kapitalizacijsko obdobje
n - čas obrestovanja
o - obresti

Obresti izračunamo z uporabo običajnega procentnega računa. En procent (ali ena stotina) začetne glavnice G_0 je $\frac{G_0}{100}$ denarnih enot, p% pa je seveda p-krat več, to je $\frac{G_0\, p}{100}$.
Torej so ***obresti za vsako posamezno kapitalizacijsko obdobje***

$$o = \frac{G_0\, p}{100} \tag{4.07}$$

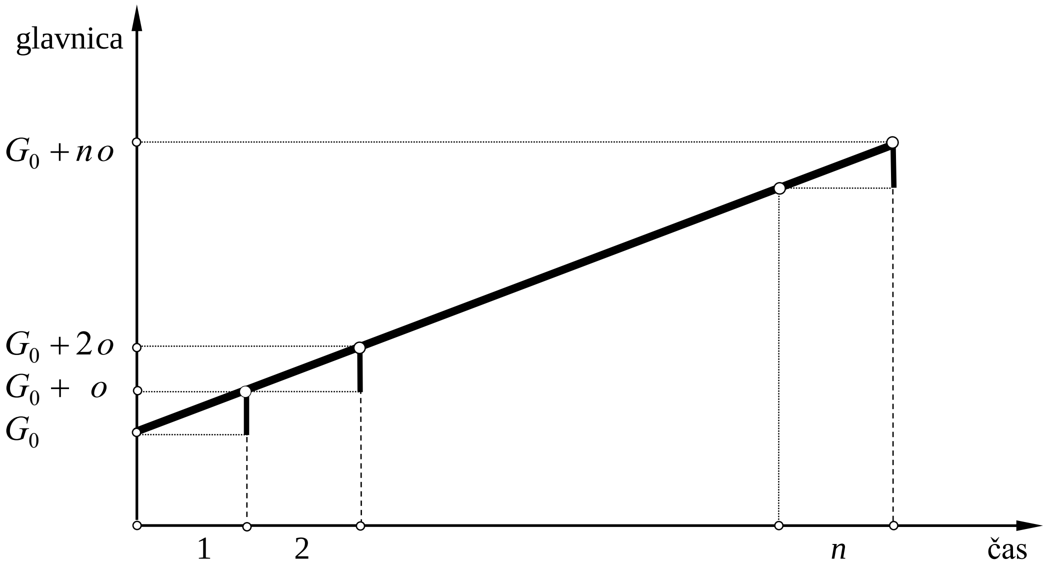
Glavnica po prvem kapitalizacijskem obdobju se poveča na $G_0 + o$, po drugem kapitalizacijskem obdobju se poveča na $G_0 + 2o$, po tretjem na $G_0 + 3o$ itd., po n-tem pa na $G_0 + no$. Očitno je, da pri navadnem obrestnem računu glavnica narašča kot aritmetično zaporedje

$$G_0,\ G_0 + o,\ G_0 + 2o,\ G_0 + 3o,\ \ldots\ , G_0 + no,\ \ldots \tag{4.08}$$

s prvim členom G_0 in diferenco o.
Zaporedje (4.08) je seveda naraščajoče, ker je diferenca pozitivna (obresti so načeloma večje od nič, vendar glej opombo spodaj[3]). Uporaba navadnega obrestnega računa torej pomeni linearno rast glavnice, zato namesto izraza navadno obrestovanje večkrat uporabljamo tudi besedo *linearno obrestovanje*.

V pravokotnem koordinatnem sistemu, kjer na vodoravni osi odmerjamo število kapitalizacijskih dob (čas), na navpični osi pa vsakokratne pripadajoče glavnice, dobimo točke, ki leže na premici (slika 30).

[3] Obrestna mera (in s tem obresti) je v izjemnih primerih lahko tudi nič ali celo negativna!



Slika 30: Linearna rast glavnice pri navadnem obrestnem računu

Če je letna obrestna mera p %, so obresti za glavnico G_0 po formuli (4.07) za eno leto $o = \frac{G_0\ p}{100}$. Zaradi že ugotovljene premosorazmernosti so obresti za en mesec le ena dvanajstina letnih, torej $o = \frac{\frac{G_0 p}{100}}{12} = \frac{G_0 p}{1200}$, za m mesecev pa so

$$o = \frac{G_0\ p\ m}{1200} \tag{4.09}$$

Podobno so navadne obresti za en dan $o = \frac{G_0\ p}{36500}$ in za d dni

$$o = \frac{G_0\ p\ d}{36500} \tag{4.10}$$

Pri prestopnem letu bi veljalo

$$o = \frac{G_0\ p\ d}{36600} \tag{4.11}$$

V formulah (4.10) in (4.11) je obrestna mera letna.

Uporaba enostavnega obrestnega računa je široka.
Poglejmo si nekatere možnosti uporabe navadnega obrestnega računa kar na primerih.

V teh primerih bomo spoznali tudi nekatere nove pojme, zato jih ne smemo preskočiti!

Primer:
Dne 14. februarja 2016 si je nekdo izposodil 10.000,00 EUR, ki jih je vrnil 3. julija istega leta. Kolikšne obresti je moral plačati, če mu je kreditodajalec obračunal navadne obresti po 6% letni obrestni meri?

Rešitev:
V nalogi ni posebej navedeno za kakšno obrestovanje gre - dekurzivno ali anticipativno. Ker se v praksi praviloma uporablja dekurzivno obrestovanje, anticipativno pa le v izjemnih primerih, se bomo držali dogovora: *vsi zneski se obrestujejo na dekurzivni način, če ni posebej povedano, da je obrestovanje anticipativno.*

Ker je bilo leto 2016 prestopno, bomo obresti izračunali po formuli (4.11), najprej pa moramo prešteti dejansko število dni.

V splošnem velja, da prvega dne (tedaj, ko denar posodimo ali ga vložimo v banko in podobno) ne štejemo, zadnji dan (tedaj, ko npr. denar vrnemo ali ga dvignemo iz banke in podobno) pa pri štetju dni upoštevamo.

V tem primeru torej ne bomo upoštevali 14. februarja, 3. julij pa bomo prišteli k dnevom obrestovanja. Dneve preštejemo po koledarju (februar ima 29 dni!):

mesec	**št. dni**
februar 2016	15
marec 2016	31
april 2016	30
maj 2016	31
junij 2016	30
julij 2016	3
Skupaj	**140**

Od tod:

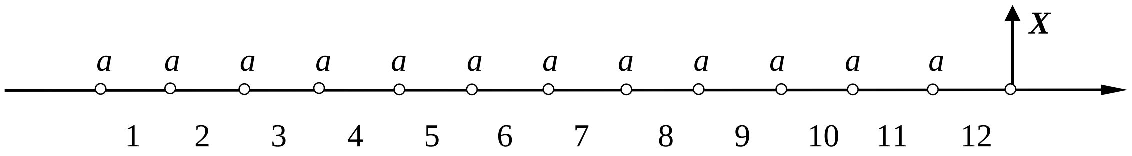
$$o = \frac{G_0 p d}{36600} = \frac{10000 \cdot 6 \cdot 140}{36600} = 229,51 \text{ EUR.}$$

♦ ♦ ♦

Primer:
V banko vlagamo eno leto na začetku vsakega meseca po 100,00 EUR. Koliko bomo imeli z obrestmi vred privarčevanega ob koncu leta, če je dogovorjeno navadno obrestovanje po 1% p.a. ?

<u>Rešitev:</u>
Zneskom, ki dospevajo ob začetku posameznega obdobja, pravimo ***prenumerando*** zneski, zneskom, ki dospevajo ob koncu vsakega obdobja, pravimo ***postnumerando*** zneski.

V našem primeru gre za prenumerando mesečne vloge. Narišimo dogajanje na časovni premici (slika 31).



Slika 31: Dinamika vlog iz zgornjega primera

Znesek a smo vložili 12-krat na začetku vsakega meseca. Znesek X je iskana skupna vrednost vseh vlog z obrestmi vred in ga smemo obravnavati kot (morebitni) dvig. Uporabimo že poznano načelo ekvivalence glavnic

Vsota vseh vlog, reduciranih na isti skupni termin	**=**	**Vsota vseh dvigov, reduciranih na isti skupni termin**

Skupni termin je lahko katera koli točka na številski premici, vzemimo v tem primeru naj bo to konec leta. Za vsako posamezno vlogo bomo smiselno porabili formulo (4.09).

Prva vloga, to je znesek a, vložen na banko na začetku prvega meseca, se obrestuje 12 mesecev, torej je na koncu leta, to je po 12 mesecih, vredna $\left(a+\frac{12\,a\,p}{1200}\right)$. Druga vloga se obrestuje 11 mesecev, torej je na koncu leta - v istem terminu - vredna $\left(a+\frac{11\,a\,p}{1200}\right)$. Podobno velja za vse ostale vloge. Zadnja med njimi se do izbranega termina naobresti le za en mesec, torej je tam vredna $\left(a+\frac{a\,p}{1200}\right)$. Iskana skupna vloga (lahko jo interpretiramo kot dvig) je v isti točki enaka kar X, tako da dobimo enačbo

$$\left(a+\frac{12\,a\,p}{1200}\right)+\left(a+\frac{11\,a\,p}{1200}\right)+\left(a+\frac{10\,a\,p}{1200}\right)+\;\cdots\;+\left(a+\frac{a\,p}{1200}\right)=X$$

Člene leve strani enačbe seštejemo:

$$12\,a+\frac{a\cdot p\,(12+11+10+\cdots+1)}{1200}=X$$

Vsota v oklepaju $(1+2+\cdots+11+12)$ je vsota 12 členov aritmetičnega zaporedja s prvim členom 1 in diferenco 1. Po formuli (3.21) $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ je ta vsota sedajle

$$S_{12} = \frac{12(1+12)}{2} = 78.$$

Od tod

$$X = \frac{a(14\,400 + 78p)}{1200} = \frac{100(14\,400 + 78 \cdot 1)}{1200} = 1.206,50 \text{ EUR.}$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Koliko bi morali vlagati v banko dve leti na koncu vsakega meseca, da bi imeli na koncu 2. leta z obrestmi vred privarčevano 1.292,00 EUR, če gre za navadno obrestovanje po obrestni meri 8% p.a. ?

Rešitev:
V tem primeru gre za *postnumerando* vloge, kar seveda vpliva na število obdobij obrestovanja. Grafični prikaz je na sliki 32.

Slika 32: Postnumerando vloge

Za skupni termin izberimo konec 2. leta. Prva vloga se do dogovorjenega termina obrestuje le 23 mesecev, druga vloga se obrestuje 22 mesecev itd, zadnja vloga pa se sploh ne obrestuje. Načelo ekvivalence glavnic da enačbo

$$\left(a + \frac{23a\,p}{1200}\right) + \left(a + \frac{22a\,p}{1200}\right) + \cdots + \left(a + \frac{a\,p}{1200}\right) + a = X$$

Člene na levi strani seštejemo

$$24\,a + \frac{a\;p\;(23 + 22 + 21 + \;\cdots\; + 1)}{1200} = X$$

V števcu je v oklepaju vsota prvih 23 zaporednih naravnih števil, to je vsota prvih 23 členov aritmetičnega zaporedja s prvim členom $a_1 = 1$ in diferenco $d = 1$. Po formuli (3.31) je ta vsota $S_{23} = 1 + 2 + \cdots + 22 + 23 = \dfrac{23 \cdot (23+1)}{2} = 276$.

Od tod

$$\frac{(28800 + 276 \cdot p) \cdot a}{1200} = X$$

in

$$a = \frac{1200 \cdot X}{28800 + 276 \cdot p} = \frac{1200 \cdot 1292}{28800 + 276 \cdot 8} = 50{,}00 \text{ EUR.}$$

Mesečna vloga mora biti 50,00 EUR.

♦ ♦ ♦

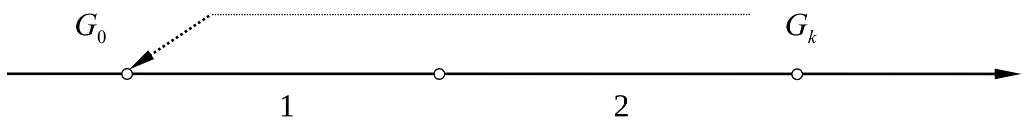
Primer:

Kolika je diskontirana vrednost glavnice 100.000,00 EUR, ki dospeva čez dva meseca, če je letna obrestna mera 8% in se dogovorimo za navadno obrestovanje?

Rešitev:

Diskontiranje glavnice *pomeni* *izračun sedanje vrednosti* *glavnice iz dane* *končne vrednosti* (slika 33). Dogovorimo se, da pomeni končna vrednost glavnice naobresteno sedanjo vrednost, ki jo bomo iz tega razloga izračunali na ***dekurzivni način*** kot neznano osnovo.

Grafično:



Slika 33: Diskontiranje glavnice

Za *m* mesecev velja

$$G_k = G_0 + o = G_0 + \frac{G_0 \cdot p \cdot m}{1200} = \frac{G_0\,(1200 + p\,m)}{1200}$$

in od tod

$$G_0 = \frac{1200\,G_k}{1200 + pm}$$

Za dva $m = 2$ (meseca) pa dobimo

$$G_0 = \frac{1200\,G_k}{1200 + pm} = \frac{1200 \cdot 100\,000{,}00}{1200 + 8 \cdot 2} = 98.684{,}20$$

Diskontirana vrednost glavnice je 98.684,20 EUR.

♦ ♦ ♦

Primer:
Kreditodajalec nam posodi 300.000,00 d.e. za 6 mesecev po 10% letni obrestni meri anticipativno in navadnem obračunu obresti. Koliko gotovine dobimo na račun tega kredita? Kolikšen kredit bi morali najeti, da bi prejeli 300.000,00 d.e. gotovine?

Rešitev:
Kreditodajalec in kreditojemalec sta se dogovorila za ***anticipativni način*** obračuna obresti, zato predstavlja kredit 300.000,00 d.e. končno vrednost glavnice G_k. Dejanski znesek, ki ga iz tega kredita prejmemo danes, je manjši od vrednosti kredita za vnaprej odštete obresti za *m* mesecev:

$$G_0 = G_k - o = G_k - \frac{G_k\ \pi\ m}{1200} = G_k\left(1 - \frac{\pi m}{1200}\right)$$

$$G_0 = 300\,000\left(1 - \frac{300\,000\ \cdot 10 \cdot 6}{1200}\right) = 285.000,00 \text{ d.e.}$$

Dejansko prejmemo danes le 285.000,00 d.e. gotovine. Če želimo dobiti celih 300.000,00 d.e. gotovine, bomo morali zaradi anticipativnega obračuna obresti najeti večji znesek posojila.

Iz splošne enačbe

$$G_0 = G_k - o = G_k - \frac{G_k\ \pi\ m}{1200} = \frac{G_k\ (1200 - \pi\ m)}{1200}$$

izračunamo končno glavnico G_k

$$G_k = \frac{1200 G_0}{1200 - \pi m}$$

V našem primeru je torej:

$$G_k = \frac{1200 G_0}{1200 - \pi m} = \frac{1200 \cdot 300\,000,00}{1200 - 10 \cdot 6} = 315.789,50 \text{ d.e.}$$

Če bi hoteli dobiti 300.000,00 d.e. gotovine danes, bi morali vzeti 315.789,50 d.e. kredita.
♦ ♦ ♦

Primer:
Kakšna anticipativna obrestna mera π je pri navadnem obrestnem računu *ekvivalentna* dekurzivni obrestni meri p ?

Rešitev:
Obrestni meri sta ekvivalentni, ko je pri dani končni vrednosti glavnice in v danem času (mesecih, dnevih) enaka tudi sedanja vrednost glavnice pri obeh načinih obrestovanja.

Vzemimo najprej mesečno obrestovanje.
Iz prejšnjega primera vemo, da pri anticipativnem mesečnem obrestovanju velja formula

$$G_0 = G_k - \frac{G_k\ \pi\ m}{1200} = G_k\left(1 - \frac{\pi m}{1200}\right)$$

Pri dekurzivnem obrestovanju za *m* mesecev pa velja:

$$G_0 = \frac{1200\ G_k}{1200 + p\ m}$$

Pogoj ekvivalence nam da enačbo

$$G_k\left(1 - \frac{\pi m}{1200}\right) = \frac{1200\ G_k}{1200 + p\ m}$$

Od tod dobimo:

$$\pi = \frac{1200p}{1200 + pm} \tag{4.12}$$

$$p = \frac{1200\pi}{1200 - \pi m} \tag{4.13}$$

Vzemimo še dnevno obrestovanje. Podobno kot za mesečno, dobimo za dnevno anticipativno obrestovanje formulo

$$G_0 = G_k\left(1 - \frac{\pi d}{36500}\right)$$

in za dnevno dekurzivno obrestovanje

$$G_0 = \frac{36500\ G_k}{36500 + p\ d}$$

Spet velja

$$G_k\left(1 - \frac{\pi d}{36500}\right) = \frac{36500\ G_k}{36500 + p\ d}$$

in že imamo:

$$\pi = \frac{36500\,p}{36500 + p\,d} \tag{4.14}$$

$$p = \frac{36500\,\pi}{36500 - \pi\,d} \tag{4.15}$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Posojilodajalec ponuja za 200 dni posojilo po anticipativni obrestni meri 10%. Kolikšni dekurzivni obrestni meri je ekvivalenten ta pogoj?

Rešitev:
Uporabili bomo že izpeljan obrazec (4.15) za podatka $\pi = 10\%$ in $d = 200$.

$$p = \frac{36500\,\pi}{36500 - \pi\,d} = \frac{36500 \cdot 10}{36500 - 10 \cdot 200} = 10{,}58\%$$

Ekvivalentna dekurzivna obrestna mera je seveda za kreditojemalca manj ugodna kot anticipativna. Pogoji se še slabšajo z naraščajočim številom dni obrestovanja: tako bi za $d = 300$ (in $\pi = 10\%$) dobili $p = 10{,}90\%$, za $d = 400$ (in $\pi = 10\%$) bi bila ekvivalentna dekurzivna obrestna mera že $p = 11{,}32\%$ itd.

♦ ♦ ♦

Primer:
Na hranilni knjižici v banki, kjer uporabljajo navadni obrestni račun, je imel nekdo leta 2017 takle promet:

Dogodek	Znesek	Dne
vloga	100.000,00 d.e.	10.01.2019
dvig	90.000,00 d.e.	15.03.2019
vloga	120.000,00 d.e.	12.07.2019
vloga	100.000,00 d.e.	03.10.2019
dvig	150.000,00 d.e.	12.12.2019

Izračunajmo stanje na hranilni knjižici po pripisu obresti dne 31.12.2019, če je obrestna mera 5% p.a..

Rešitev:
Pri obračunu obresti za hranilne vloge lahko uporabljamo dve metodi - progresivno in stopnjevalno.

Pri ***progresivni metodi*** *obračunavamo obresti posebej za vloge in posebej za dvige za čas od nastanka dogodka do izbranega datuma. Skupne obresti dobimo z razliko med obrestmi od vlog in obrestmi od dvigov. Izbrani datum je običajno 31.december tistega leta, za katerega računamo obresti.*

Pri ***stopnjevalni metodi*** *vsakokratno* ***stanje (saldo)*** *hranilne vloge/dviga obrestujemo od njenega nastanka do naslednje spremembe (vloge/dviga), pri zadnji spremembi pa do dogovorjenega datuma - običajno 31.december tistega leta, za katerega računamo obresti.*

Obe metodi delujeta na osnovi istih pravil navadnega obrestnega računa, zato je seveda končni rezultat pri obeh metodah enak!

Rešimo nalogo na oba načina!

a) Progresivna metoda
Najprej za vse dogodke preštejemo dneve po koledarju od datuma nastanka dogodka do 31.12.2019. Pri tem prvega dne ne štejemo, zadnji dan pa upoštevamo. Upoštevajmo še, da leto 2019 ni bilo prestopno.

Prvi dogodek je vloga 100.000,00 d.e., opravljena 10.01.2019. Od tega dne do 31.12.2019 je preteklo 355 dni.
Drugi dogodek je dvig 90.000,00 d.e. dne 15.03.2019. Do 31.12.2019 je preteklo 291 dni.
Tretji dogodek je vloga 120.000,00 d.e. dne 12.07.2019. Do 31.12.2019 je preteklo 172 dni.
Četrti dogodek je vloga 100.000,00 d.e. dne 03.10.2019. Do 31.12.2019 je preteklo 88 dni.
Peti dogodek je dvig 150.000,00 d.e. dne 12.12.2019. Do 31.12.2019 je preteklo 19 dni.

Za vsak znesek izračunamo pripadajoče obresti po formuli (4.10). Pri tem dodelimo obrestim za vloge pozitivni predznak, obrestim za dvige pa negativni predznak. Negativni predznak pomeni, da teh obresti zaradi opravljenega dviga nismo dobili.

Dogodek	Znesek (d.e.)	Št. dni	Obresti (d.e.)
vloga	100.000,00	355	+4.863,01
dvig	90.000,00	291	-3.587,67
vloga	120.000,00	172	+2.827,39
vloga	100.000,00	89	+1.219,18
dvig	150.000,00	19	-390,41
Obresti skupaj			4.931,50

Sedaj lahko tvorimo celotno tabelo:

Valuta	Dni	Vloge	Dvigi	Stanje	Obresti za vloge	Obresti za dvige
10.01.2019	355	100.000,00		100.000,00	4.863,01	
15.03.2019	291		90.000,00	10.000,00		3.587,67
12.07.2019	172	120.000,00		130.000,00	2.827,39	
03.10.2019	89	100.000,00		230.000,00	1.219,18	
12.12.2019	19		150.000,00	80.000,00		390,41
31.12.2019		4.931,50		84.931,50	8.909,58	3.978,08

b) Stopnjevalna metoda
Spet najprej izračunamo število dni od enega do drugega dogodka.

Od 10.01.2019 do 15.03.2019 je 64 dni.
Od 15.03.2019 do 12.07.2019 je 129 dni.
Od 12.07.2019 do 03.10.2019 je 83 dni.
Od 03.10.2019 do 12.12.2019 je 70 dni.
Od 12.12.2019 do 31.12.2019 je 19 dni.

Za posamezno število dni izračunamo navadne obresti od trenutnega stanja po formuli (4.10) in vse skupaj zapišemo v tabelo:

Valuta	Dni	Vloge	Dvigi	Stanje	Obresti za stanje
10.01.2019	64	100.000,00		100.000,00	876,71
15.03.2019	119		90.000,00	10.000,00	163,01
12.07.2019	83	120.000,00		130.000,00	1.478,08
03.10.2019	70	100.000,00		230.000,00	2.205,48
12.12.2019	19		150.000,00	80.000,00	208,22
31.12.2019		4.931,50		84.931,50	4.931,50

Obresti ob koncu leta so seveda tudi sedaj izračunane v znesku 4.931,50 denarnih enot, tako da je bilo stanje na hranilni knjižici dne 31.12.2019 natanko 84.931,50 denarnih enot.
♦ ♦ ♦

4.4 Obrestno obrestni račun

Pri navadnem obrestnem računu se je ves čas obrestovala le osnovna glavnica. Obresti so bile za vsa enaka časovna obdobja pri isti obrestni meri vedno enake. Osnovna glavnica in zaporedne naobrestene glavnice so predstavljale naraščajoče aritmetično zaporedje, pri katerem je prvi člen enak osnovni glavnici, diferenca pa je enaka obrestim za vsako (enako dolgo) obdobje.

Pri obrestno obrestnem računu pa obresti ne računamo le od osnovne glavnice, temveč vedno od glavnice, povečane za obresti v preteklem časovnem obdobju. Obresti torej računamo tudi od vseh obresti, nastalih v preteklih kapitalizacijskih obdobjih.

Poglejmo, kako v tem primeru narašča osnovna glavnica G_0. Vzemimo najprej, da imamo opravka z ***dekurzivnim obrestovanjem***, letno obrestno mero p in letnim pripisom obresti, torej kapitalizacijo $m = 1$.

Na koncu prvega leta se prvotna glavnica G_0 poveča na vrednost G_1. Če z o_1 označimo pripadajoče obresti po prvem letu (za glavnico G_0), velja:

$$G_1 = G_0 + o_1 = G_0 + \frac{G_0\ p}{100} = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Faktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ se pri obrestno obrestnem računu stalno pojavlja, zato ga označimo krajše

$$r = 1 + \frac{p}{100} \tag{4.16}$$

in mu damo ime ***dekurzivni obrestovalni faktor***.

Vrednost glavnice na koncu prvega leta je torej

$$G_1 = G_0\ r$$

Na koncu drugega leta vrednost glavnice naraste na znesek G_2. Podobno kot prej velja, da je G_2 za pripadajoče obresti povečana glavnica G_1, pri čemer zaradi obrestnega obrestovanja te obresti računamo od nove osnove G_1:

$$G_2 = G_1 + o_2 = G_1 + \frac{G_1\ p}{100} = G_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_1\ r = G_0\ r\ r = G_0\ r^2$$

Po istem postopku bi ugotovili, da je glavnica po treh letih $G_3 = G_0\, r^3$, po štirih letih $G_4 = G_0\, r^4$ itd. Splošno, vrednost začetne glavnice G_0 po *n* letih je

$$G_n = G_0\, r^n \tag{4.17}$$

Formulo (4.17) dokažemo z metodo popolne indukcije, kar naj naredi bralec za vajo sam.

Zaporedje glavnic pri obrestnem obrestovanju

$$G_0\ ,\ G_0\, r\ ,\ G_0\, r^2, \ldots\ ,\ G_0\, r^n\ ,\ \ldots \tag{4.18}$$

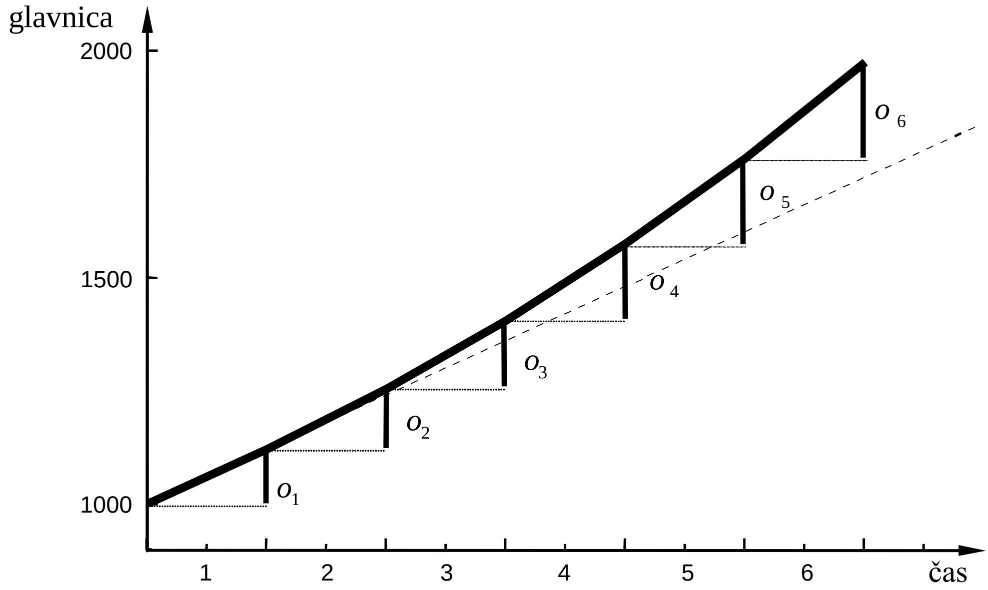
tvori geometrično zaporedje s prvim členom G_0 in kvocientom r. Obrestna mera je v praksi (skoraj) vedno pozitivna ($p > 0$), zato je obrestovalni faktor $r = 1 + \frac{p}{100}$ (skoraj) vedno večji od 1. To pomeni, da je zaporedje (4.18) v (skoraj) vseh realnih primerih naraščajoče.

Primer:
Naj bo začetna glavnica 1.000,00 d.e. in naj se obrestuje 6 let po 12% letni obrestni meri. Izračunajmo in narišimo vrednosti glavnice po enem, dveh, treh, **. . .**, šestih letih!

Rešitev:
Obrestovalni faktor $r = 1 + \frac{p}{100}$ je v tem primeru $r = 1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$.
Zaporedne potence obrestovalnega faktorja, vrednost glavnice na koncu vsakega leta in pripadajoče vsakokratne obresti zapišimo v tabelo.

n	r^n	G_n	o_n
0	1	1.000,00	-
1	1,12	1.120,00	120,00
2	1,2544	1.254,40	134,40
3	1,404928	1.404,93	150,53
4	1,57351936	1.573,52	168,59
5	1,7623416832	1.762,34	188,82
6	1,973822685184	1.973,82	211,48
	Obresti skupaj:		973,82

Grafični prikaz vidimo na sliki 34.



Slika 34: Naraščanje glavnice pri obrestnem obrestovanju

♦ ♦ ♦

Na sliki 34 je s črtkano črto narisana premica, ki prikazuje rast glavnice, s katero bi imeli opravka, če bi šlo za navadno obrestovanje. Povedali smo že, da v takšnem primeru glavnica narašča linearno.

Pri obrestno obrestnem računu se glavnica povečuje hitreje, pravimo, da narašča ***eksponentno***.

Razlika med obrestmi oz. naraščanjem glavnice pri navadnem obrestnem računu in pri obrestno obrestnem računu je tem večja, čim bolj se povečuje obrestna mera. Iz te primerjave tudi vidimo, da so v inflacijskih pogojih, ko je obrestna mera velika, realno smiselne in uporabne le obrestne obresti.

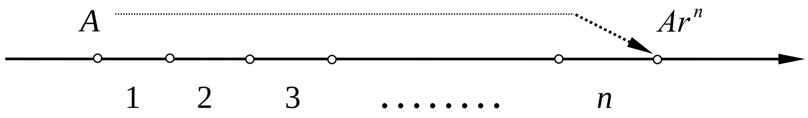
Iz obrazca (4.17) lahko izračunamo katero koli neznano količino, če so ostale znane.

Izrazimo najprej začetno glavnico:

$$G_0 = \frac{G_n}{r^n} \tag{4.19}$$

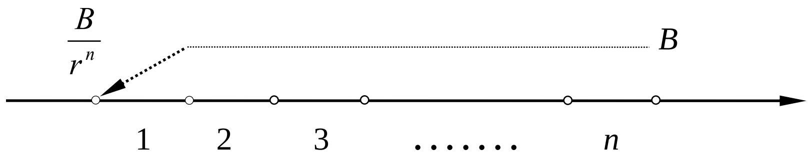
Reduciranje glavnice pri dekurzivnem obrestnem obrestovanju si predstavimo grafično na časovni premici na slikah 35 in 36.

Znesek *A* ***naobrestimo*** za *n* obdobij tako, da ga ***pomnožimo*** z ustrezno potenco dekurzivnega obrestovalnega faktorja (slika 35).



Slika 35: Znesek *A* naobrestimo za *n* obdobij

Znesek B ***razobrestimo*** za *n* obdobij tako, da ga ***delimo*** z ustrezno potenco dekurzivnega obrestovalnega faktorja (slika 36):



Slika 36: Znesek *B* razobrestimo za *n* obdobij

Sedaj iz (4.18) izračunajmo obrestno mero:

$$G_n = G_0 r^n \Rightarrow r = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$$

Ker je $r = 1 + \frac{p}{100}$, dobimo iskano obrestno mero:

$$p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right) \tag{4.20}$$

Čas obrestovanja *n* je v eksponentu formule (4.17). V takšnem primeru si pomagamo z logaritmi. Enačbo $G_n = G_0\, r^n$ logaritmiramo na obeh straneh, pri čemer upoštevamo lastnosti logaritmov (1.26) - (1.28):

$$\log G_n = \log G_0 + n \log r$$

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log r} \tag{4.21}$$

Primer:
Koliko časa se je obrestovala glavnica 15.000,00 d.e. , če se je pri letni obrestni meri 12% povečala na 26.435,12 d.e.?

Rešitev:
Računamo čas obrestovanja, zato bomo uporabili formulo (4.21). Zaradi $G_0 = 15.000{,}00$ d.e., $G_n =$ 26.435,12 d.e. in $r = 1{,}12$, dobimo

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log r} = \frac{\log 26435{,}12 - \log 15000}{\log 1{,}12} =$$
$$= \frac{4{,}422181 - 4{,}176091}{0{,}049218} = 5$$

Glavnica se je obrestovala 5 let.
♦ ♦ ♦

Poglejmo sedaj še ***anticipativno obrestovanje*** z letno anticipativno obrestno mero π in letnim pripisom obresti. Vemo že, da je pri anticipativnem obrestovanju izhodišče za računanje obresti končna vrednost glavnice.

Vzemimo, da smo si na začetku leta sposodili znesek G_1 pri anticipativni letni obrestni meri π in letni kapitalizaciji. Dejanski znesek, ki ga dobimo, označimo ga z G_0, je manjši za v naprej odštete anticipativne obresti:

$$G_0 = G_1 - o_1 = G_1 - \frac{G_1\,\pi}{100} = G_1\left(1 - \frac{\pi}{100}\right)$$

Od tod

$$G_1 = \frac{G_0}{1 - \frac{\pi}{100}} = G_0\,\frac{100}{100 - \pi} = G_0\,\rho$$

Število

$$\rho = \frac{100}{100 - \pi} \tag{4.22}$$

imenujemo ***anticipativni obrestovalni faktor***.

Če se G_1 anticipativno obrestuje še eno leto, dobimo glavnico $G_2 = G_1\,\rho = G_0\,\rho^2$, po treh letih $G_3 = G_0\,\rho^3$ itd. Splošno, po *n* letih pridemo do glavnice

$$G_n = G_0\,\rho^n \tag{4.23}$$

Tudi formulo (4.23) dokažemo z metodo popolne indukcije.

Vzemimo spet smiselno možnost, da je obrestna mera pozitivna ($\pi > 0$), je v (4.22) imenovalec manjši od števca. Anticipativni obrestovalni faktor $\rho = \dfrac{100}{100-\pi}$ je torej večji od 1. Zaporedje glavnic

$$G_0\ ,\ G_0\,\rho\ ,\ G_0\,\rho^2\ ,\ \ldots,\ G_0\,\rho^n\ ,\ \ldots \tag{4.24}$$

je spet geometrično in strogo naraščajoče.

Podobno kot pri dekurzivnem lahko tudi pri anticipativnem obrestovanju iz formule (4.23) izračunamo poljubno količino, če so ostale znane. Anticipativno obrestovanje smemo (pogojno rečeno) formalno obravnavati kot dekurzivno, drugačen je le obrestovalni faktor.

Začetno ali sedanjo vrednost glavnice G_n dobimo po formuli

$$G_0 = \frac{G_n}{\rho^n} \tag{4.25}$$

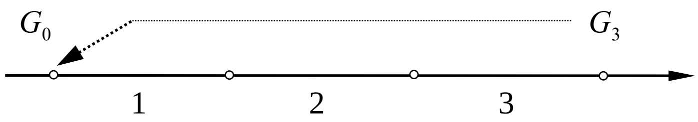
Iz (4.23) izračunamo še anticipativno obrestno mero

$$\pi = 100\left(1-\sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}}\right) \tag{4.26}$$

in število obrestovalnih obdobij

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log \rho} \tag{4.27}$$

<u>Primer:</u>
Kolikšen znesek dobimo danes, če moramo po treh letih vrniti 100.000,00 d.e. pri anticipativnem obrestovanju in 10% letni anticipativni obrestni meri (slika 37)?



Slika 37: Primer anticipativnega obrestovanja

<u>Rešitev:</u>
Ker je $\pi = 10\%$, je anticipativni obrestovalni faktor $\rho = \dfrac{100}{100-\pi} = \dfrac{100}{100-10} = \dfrac{100}{90} = 1{,}11$.

Vrednost posojila po treh letih bo $G_3 = 100.000{,}00$ d.e., zato je sedanja vrednost

$$G_0 = \frac{G_3}{\rho^3} = \frac{100\,000{,}00}{1{,}11^3} = 72.900{,}00 \text{ d.e.}$$

Danes bomo torej dobili le 72.900,00 d.e.

♦ ♦ ♦

Primer:

Kolika je anticipativna letna obrestna mera, če smo na račun dolga, ki ima čez deset let vrednost 83.509,10 d.e. , danes dobili 50.000,00 d.e.?

Rešitev:

Ker je $G_{10} = 83.509{,}10$ d.e., $G_0 = 50.000{,}00$ d.e. in $n = 10$, dobimo iz formule (4.26)

$$\pi = 100\left(1 - \sqrt[n]{\frac{G_0}{G_n}}\right) = 100\left(1 - \sqrt[10]{\frac{50\,000{,}00}{83509{,}10}}\right) = 5\%$$

Iskana anticipativna letna obrestna mera je $\pi = 5\%$.

♦ ♦ ♦

Primer:

Vzeli smo kredit v znesku 64.617,80 d.e., ki zapade čez n let. Ker je bilo obrestovanje anticipativno z letno obrestno mero $\pi = 5\%$, smo dobili le 50.000,00 d.e. gotovine. Čez koliko let moramo vrniti kredit?

Rešitev:

Uporabili bomo formulo (4.27). Iz podatkov $G_n = 64.617{,}80$ d.e, $G_0 = 50.000{,}00$ d.e, $\pi = 5\%$ oz. $\rho = \frac{100}{95}$, dobimo

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log \rho} = \frac{\log 64617{,}80 - \log 50000}{\log \frac{100}{95}} = 5$$

Posojilo moramo vrniti čez 5 let.

♦ ♦ ♦

Včasih je potrebno anticipativno obrestno mero nadomestiti z dekurzivno ali obratno, tako da dobimo pri enaki kapitalizacijski dobi enake obresti. V takšnem primeru pravimo, da sta ***obrestni meri ekvivalentni***.

Enake obresti pri enakih ostalih pogojih dobimo, če se obrestovalna faktorja med seboj ujemata. Zahteva $r = \rho$ nam da enačbo

$$1+\frac{p}{100}=\frac{100}{100-\pi}$$

iz katere dobimo dekurzivno obrestno mero izraženo z anticipativno

$$p=\frac{100\ \pi}{100-\pi} \tag{4.28}$$

oziroma anticipativno obrestno mero izraženo z dekurzivno

$$\pi=\frac{100\ p}{100+p} \tag{4.29}$$

Primer:
Katera anticipativna obrestna mera je ekvivalentna dekurzivni obrestni meri $p = 10\%$?

Rešitev:
Iz formule (4.29) sledi

$$\pi=\frac{100\ p}{100+p}=\frac{100\cdot 10}{100+10}=\frac{1000}{110}=9{,}09\%$$

♦ ♦ ♦

Primer:
Katera dekurzivna obrestna mera je ekvivalentna anticipativni obrestni meri $\pi = 10\%$?

Rešitev:
Iz formule (4.28) dobimo

$$p=\frac{100\ \pi}{100-\pi}=\frac{100\cdot 10}{100-10}=\frac{1000}{90}=11{,}11\%$$

♦ ♦ ♦

Oba zgornja primera sta ponovno potrdila že znano dejstvo: *Anticipativno obrestovanje je za kreditojemalca manj ugodno (dražje) kot dekurzivno!*

4.4.1 Relativna in konformna obrestna mera

Doslej smo v zvezi z *letno obrestno mero* (dekurzivno ali anticipativno) govorili le o letih kot časovnih enotah obrestovanja. V praksi pa imamo opravka tudi z krajšimi časovnimi obdobji obrestovanja. Tako imamo lahko polletni pripis obresti oz. polletno kapitalizacijo

($m = 2$), četrtletno ali kvartalno kapitalizacijo ($m = 4$), mesečno kapitalizacijo ($m = 12$) in dnevno kapitalizacijo ($m = 365$ za navadno oziroma $m = 366$ za prestopno leto). Vrednost parametra m pove, kolikokrat v letu dni osnovni glavnici pripišemo obresti. To je torej število, ki pove kolikokrat je dano kapitalizacijsko obdobje krajše od enega celega leta.

Pri navadnem obrestnem računu seveda v takšnih primerih ni bilo nobenih težav, ker so obresti premo sorazmerne dani obrestni meri. Če je bila obrestna mera letna, kapitalizacija pa krajša, smo ustrezno obrestno mero za krajše časovno obdobje dobili kot m-ti del letne

obrestne mere. Npr., če je bila kapitalizacija mesečna ($m = 12$), smo iz letne obrestne mere dobili mesečno tako, da smo jo delili z 12, torej $p' = p / 12$.

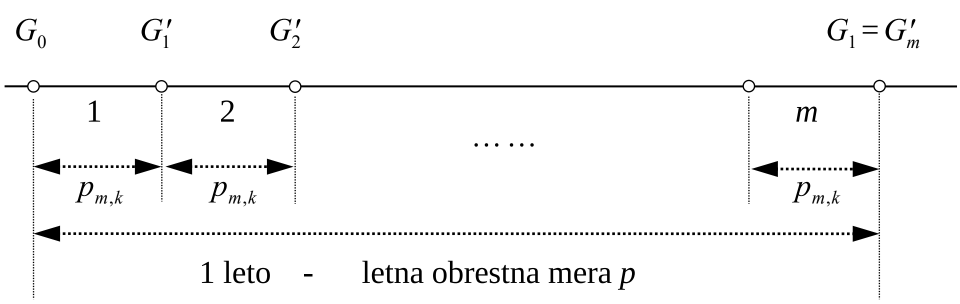
Ko pri obrestno obrestnem računu iz letne obrestne mere računamo obrestno mero za krajše kapitalizacijsko obdobje, imamo na razpolago dve možnosti. Po prvem postopku dobimo *relativno*, po drugem pa *konformno* obrestno mero.

1. ***Relativno obrestno mero*** $p_{m,r}$ za dano kapitalizacijsko obdobje dobimo tako, da letno obrestno mero p delimo s številom m, to je s številom kapitalizacijskih obdobij:

$$p_{m,r} = \frac{p}{m} \tag{4.30}$$

   Relativno obrestno mero dobimo torej tako kot pri navadnem obrestnem računu. Ker pa pri obrestno obrestnem računu obrestna mera in obresti niso premo sorazmerne, je relativna obrestna mera le bolj ali manj dober ***približek***. Ta približek je boljši, če je letna obrestna mera majhna in se močno slabša, če se letna obrestna mera povečuje.

2. ***Konformno obrestno mero*** $p_{m,k}$ dobimo iz zahteve, da moramo iz začetne glavnice G_0 z novo obrestno mero pri pogostejši kapitalizaciji dobiti enako končno glavnico kot pri celoletni kapitalizaciji in dani letni obrestni meri (slika 38).



Slika 38: Konformna obrestna mera

Naj bo dekurzivna letna obrestna mera p, obresti pa se naj kapitalizirajo m-krat. Končna vrednost glavnice mora biti enaka, če pripišemo obresti enkrat po obrestni meri p (končna vrednost G_1) ali pa m-krat po obrestni meri $p_{m,k}$ (končna vrednost G_m').

Enačbo $G_m' = G_1$ zapišemo v obliki

$$G_0\left(1+\frac{p_{m,k}}{100}\right)^m = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Od tod izračunamo konformno obrestno mero

$$p_{m,k} = 100\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right) \tag{4.31}$$

Velikokrat računamo kar ***konformni obrestovalni faktor*** $r_{m,k}$

$$r_{m,k} = 1+\frac{p_{m,k}}{100} = \sqrt[m]{r} \tag{4.32}$$

<u>Primer:</u>
Izračunajmo polletno in mesečno relativno in konformno obrestno mero za letno obrestno mero 36% p.a.

<u>Rešitev:</u>
a) relativna obrestna mera

- polletna ($m=2$): $p_{2,\,r} = \frac{p}{2} = \frac{36\%}{2} = 18\%$
- mesečna ($m=12$): $p_{12,\,r} = \frac{p}{12} = \frac{36\%}{12} = 3\%$

b) konformna obrestna mera

- polletna ($m=2$):

$$p_{2,k} = 100\left(\sqrt[2]{1+\frac{p}{100}}-1\right) = 100\left(\sqrt[2]{1{,}36}-1\right) = 16{,}62\%$$

- mesečna ($m=12$):

$$p_{12,k} = 100\left(\sqrt[12]{1+\frac{p}{100}}-1\right) = 100\left(\sqrt[12]{1{,}36}-1\right) = 2{,}595\%$$

♦ ♦ ♦

Konformna obrestna mera po definiciji dani začetni glavnici pri večkratni kapitalizaciji priredi enako končno glavnico kot letna obrestna mera pri celoletni kapitalizaciji. Obračun obresti je zato v celoti pravilen le po konformni obrestni meri.

Relativna obrestna mera je vedno prevelika, z njo dobimo vedno večje končne vrednosti glavnice kot pri dani letni obrestni meri s celoletno kapitalizacijo.

To pravilo je iz zgornjega primera jasno razvidno, saj se relativna in konformna obrestna mera pri enakih pogojih kar precej razlikujeta.

Primer:
Glavnica 10.000,00 d.e. se obrestuje dve leti po 12% letni obrestni meri. Kolikšne so obresti po dveh letih, če je kapitalizacija kvartalna in pripadajoča obrestna mera:

a) relativna,
b) konformna?

Rešitev:

a) Kvartalna relativna obrestna mera je $p_{4,r} = \frac{p}{4} = 3\%$. V dveh letih se glavnica obrestuje 8-krat, tako da je končna vrednost glavnice

$$G_8 = G_0\, r_{4,r}^8 = 10000{,}00 \cdot 1{,}03^8 = 12.667{,}70 \text{ d.e.}$$

in skupne obresti v tem času: $o = G_8 - G_0 = 2.667{,}70$ d.e.

b) Kvartalna konformna obrestna mera je $p_{4,k} = 100\left(\sqrt[4]{1{,}12} - 1\right)$. Od tod dobimo $p_{4,k} = 2{,}8737\%$.

Ustrezni dekurzivni obrestovalni faktor je $r_{4,k} = 1 + \frac{p_{4,k}}{100} = 1{,}028737$.

Opomba: *Pri računanju obresti obrestne mere sploh ne rabimo, pač pa potrebujemo ustrezni obrestovalni faktor. Konformni obrestovalni faktor pa dobimo zelo enostavno iz (4.32):* $r_{m,k} = \sqrt[m]{r}$.

V tem primeru velja

$$r_{4,k} = \sqrt[4]{1{,}12} = 1{,}028737344722$$

Od tod

$$G_8 = G_0\, r_k^8 = 10000{,}00 \cdot 1{,}028737344722^8 = 12.544{,}00 \text{ d.e.}$$

in obresti so: $o = G_8 - G_0 = 2.544{,}00$ d.e.

Opomba: Ker (spet po definiciji konformne obrestne mere) pomeni 8-kratno kvartalno obrestovanje po kvartalni konformni obrestni meri isto kot 2-kratno letno obrestovanje po letni obrestni meri, je seveda res: $G_0\, r^2 = G_0\, r_{4,k}^8$.

♦ ♦ ♦

Primer:
Dne 10.5.2016 smo vzeli 100.000,00 d.e. kredita po 15% letni obrestni meri. Koliko smo morali vrniti dne 12.6.2016, če je obrestovanje dekurzivno in kapitalizacija dnevna ($m = 366$, ker je bilo leto 2016 prestopno) ?

Rešitev:
Po znanih pravilih preštejemo najprej število dni: $d = 33$. Leto 2016 je bilo prestopno, zato bo obrestovalni faktor za 1 dan:

$$r_{366,k} = \sqrt[366]{1{,}15} = 1{,}00038193615$$

in za 33 dni:

$$r_{366,k}^{33} = \left(\sqrt[366]{1{,}15}\right)^{33} = \sqrt[366]{1{,}15^{33}} = 1{,}012681219907$$

Znesek, ki ga moramo vrniti, pa je

$$G_{33} = G_0\ r_{366,\,k}^{33} = 101.268{,}12 \text{ d.e.}$$

Opomba 1: Če bi vzeli za leto 365 dni, bi dobili $r_{365,k}^{33} = 1{,}012716182946$ in zahtevani znesek $G_{33} = 101.271{,}62$. Razlika je pri velikih glavnicah lahko zelo velika.

Opomba 2: Konformni obrestovalni faktor računamo na čim več decimalk natančno - merilo naj bo kar število decimalnih mest na računalniku. Pri nominalno velikih glavnicah je ta natančnost zelo pomembna.

♦ ♦ ♦

4.4.2 Nekaj primerov uporabe obrestno obrestnega računa

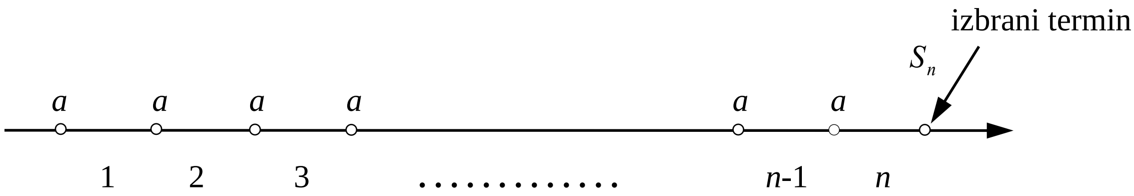
4.4.2.1 Periodične vloge

Zastavimo si naslednji problem: vsako leto vlagamo v banko enak znesek *a*. Kolikšna je skupna vrednost teh zneskov po preteku *n* let, če je obrestovanje dekurzivno, obrestna mera *p*% p.a. in kapitalizacija letna?

V primeru, ko so vse vloge enake in jih vlagamo (na banko) v enakih časovnih intervalih (periodah), govorimo o *periodičnih vlogah.* Pri takšnih situacijah imamo dve možnosti:

- zneske vlagamo na začetku kapitalizacijske dobe (*prenumerando*),
- zneske vlagamo na koncu kapitalizacijske dobe (*postnumerando*).

Poglejmo najprej prenumerando zneske. Kot običajno si pomagamo grafično s časovno premico. Periodične prenumerando vloge označimo z *a*, njihovo končno vrednost po *n* periodah pa z S_n (slika 39).



Slika 39: Prenumerando periodične vloge

Uporabimo načelo ekvivalence glavnic. Termin, v katerega bomo reducirali vse vloge in vse dvige, zaradi enostavnega računanja izberimo na koncu *n*-tega leta. V tej točki končne vrednosti S_n ni potrebno niti naobrestiti niti razobrestiti, torej se ne spremeni. Prvo vlogo je do izbrane točke potrebno naobrestiti za n let, torej je v izbrani točka njena vrednost $a\,r^n$; drugo vlogo je do izbrane točke potrebno naobrestiti za (*n*-1) let, torej je tam njena vrednost $a\,r^{n-1}$ itd., predzadnjo vlogo je potrebno naobrestiti za 2 leti in zadnjo za eno leto. Na ta način dobimo enačbo

$$S_n = a\,r^n + a\,r^{n-1} + a\,r^{n-2} + \cdots + a\,r^2 + a\,r$$

Na desni strani te enačbe izpostavimo skupni faktor $a\,r$:

$$S_n = a\,r\left(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + r^2 + r + 1\right)$$

V oklepaju je vsota n členov geometričnega zaporedja s prvim členom $a_1 = 1$ in kvocientom r . Formula za vsoto prvih n členov geometričnega zaporedja se glasi $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, zato je vsota v oklepaju

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Iskani končni znesek vseh n prenumerando periodičnih vlog je

$$S_n = a\,r\,\frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{4.33}$$

<u>Primer:</u>
Večkrat smo že poudarili, da je točka, v katero reduciramo dvige in vloge, poljubna. Zgolj zaradi lažjega (in s tem hitrejšega) računanja jo običajno vzamemo ali na koncu ali na začetku štetja časovnih intervalov. Vzemimo za primer nalogo, ki smo jo ravnokar rešili, le da naj bo izbrana točka reduciranja npr. začetek tretjega leta (slika 40).

Slika 40: Reduciranje glavnic na poljubni termin

Skupno končno vrednost S_n vseh periodičnih vlog moramo, ko jo reduciramo v izbrano točko, razobrestiti za (n -2) let, torej je tam njena vrednost $\dfrac{S_n}{r^{n-2}}$.

Prvo vlogo naobrestimo za dve leti, drugo vlogo naobrestimo za eno leto, tretja vloga se v dani točki ne spremeni, **...** , zadnjo vlogo moramo razobrestiti za (n - 3) let. Enačba se glasi:

$$\frac{S_n}{r^{n-2}} = a\,r^2 + a\,r + a + \frac{a}{r} + \cdots + \frac{a}{r^{n-3}}$$

Enačbo pomnožimo z r^{n-2} in dobimo $S_n = a\,r^n + a\,r^{n-1} + a\,r^{n-2} + \cdots + a\,r$,
kar je seveda enako kot prej. Termin, v katerega reduciramo vse glavnice, je res poljuben.
♦ ♦ ♦

Poglejmo sedaj še postnumerando zneske. Tudi tu si pomagamo grafično s časovno premico (slika 41).

Slika 41: Postnumerando periodične vloge

Ponovno uporabimo načelo ekvivalence glavnic. Termin, v katerega bomo reducirali vse vloge in vse dvige, zaradi enostavnega računanja spet izberimo na koncu *n*-tega leta. V tej točki ostane skupna glavnica S_n nespremenjena. Prvo vlogo je do izbrane točke potrebno naobrestiti za $(n-1)$ let, drugo vlogo je do izbrane točke potrebno naobrestiti za $(n-2)$ let itd….., predzadnjo vlogo je potrebno naobrestiti za eno leto, zadnja vloga pa se spet ne spremeni.

$$S_n = a\,r^{n-1} + a\,r^{n-2} + a\,r^{n-3} + \cdots + a\,r^2 + r + a$$

Na desni strani te enačbe izpostavimo skupni faktor *a*:

$$S_n = a\left(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + r^2 + r + 1\right)$$

V oklepaju ponovno dobimo vsoto n členov geometričnega zaporedja s prvim členom $a_1 = 1$ in kvocientom *r*.

Iskani končni znesek vseh n postnumerando periodičnih vlog je

$$S_n = a\,\frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad (4.34)$$

Primer:
V banko vlagamo 10 let po 1.000,00 d.e. letno. Kolikšna je skupna končna vrednost vseh vlog po koncu 10. leta pri dekurzivnem obrestovanju, 7% letni obrestni meri in letni kapitalizaciji, če so vloge

a) prenumerando,
b) postnumerando ?

Rešitev:
Podatki so: $a = 1.000{,}00$ d.e., n = 10, $r = 1{,}07$, m = 1.

a) prenumerando vloge (slika 42):

Slika 42: Prenumerando vloge

Tu lahko direktno uporabimo formulo (4.33) in dobimo

$$S_{10} = a\,r\,\frac{r^{10}-1}{r-1} = 1\ 000{,}00 \cdot 1{,}07 \cdot \frac{1{,}07^{10}-1}{1{,}07-1} = 14.783{,}60 \text{ d.e.}$$

b) postnumerando vloge (slika 43):

Slika 43: Postnumerando vloge

Uporabimo formulo (4.34)

$$S_{10} = a\,\frac{r^{10}-1}{r-1} = 1000{,}00 \cdot \frac{1{,}07^{10}-1}{1{,}07-1} = 13.816{,}45 \text{ d.e.}$$

♦ ♦ ♦

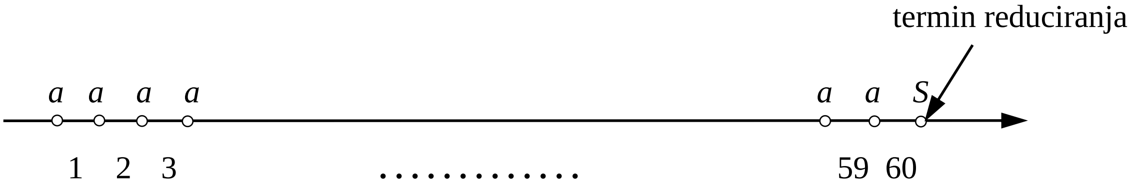
Primer:
V banko želimo 5 let vlagati na začetku vsakega meseca vedno enak znesek, tako da bi imeli na koncu 5. leta skupen znesek S = 100.000,00 d.e. Kolikšne morajo biti mesečne vloge, če je dekurzivna obrestna mera 5% in je kapitalizacija:

a) mesečna,
b) letna?

Rešitev:
a) Ko je kapitalizacija mesečna, torej ko je potrebno pripisati obresti vsak mesec, moramo najprej iz dane letne obrestne mere izračunati konformno mesečno obrestno mero oz. konformni mesečni obrestovalni faktor:

$$r_{12,k} = \sqrt[12]{r} = \sqrt[12]{1{,}05} = 1{,}004074123784$$

Sedaj imamo situacijo, ko je za obdobje, ob koncu katerega pripišemo obresti (1 mesec) znan ustrezni dekurzivni obrestovalni faktor. To pomeni, da gre za 60 enakih periodičnih vlog (slika 44) in lahko uporabimo kar formulo (4.33).



Slika 44: Periodične mesečne vloge

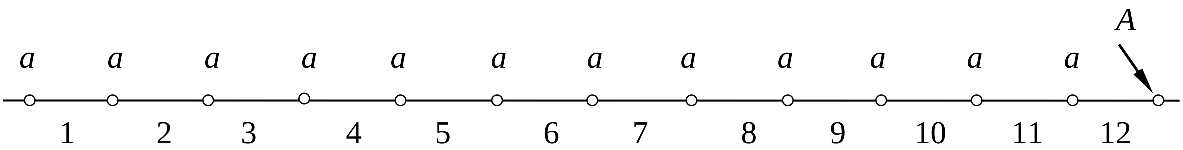
Velja torej

$$S = a\,r_{12,k}\,\frac{r_{12,k}^{60}-1}{r_{12,k}-1} \Rightarrow a = \frac{S\left(r_{12,k}-1\right)}{r_{12,k}\left(r_{12,k}^{60}-1\right)}$$

Od tod

$$a = \frac{S\left(r_{12,k}-1\right)}{r_{12,k}\left(r_{12,k}^{60}-1\right)} = \frac{100\,000,00\left(1,004074123784-1\right)}{1,004074123784\left(1,004074123784^{60}-1\right)} = 1.468,64 \text{ d.e.}$$

b) Ko je obdobje pripisa obresti večje od obdobja, ki preteče med zaporednimi vlogami (v našem primeru so vloge mesečne, kapitalizacija pa letna), je običaj, ***da dogajanje znotraj kapitalizacijskega obdobja obračunamo z navadnim obrestnim računom.***
To pomeni, da bomo vseh dvanajst mesečnih vlog nadomestili z eno samo vlogo, označimo jo A (slika 45), ki jo bomo dobili z navadnim obrestnim računom.



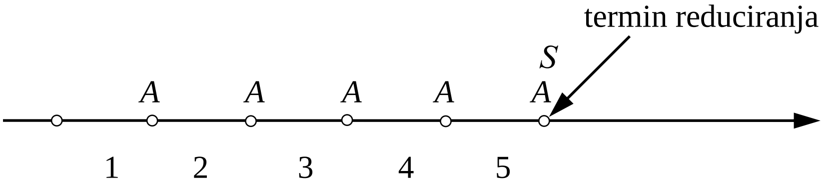
Slika 45: Mesečne vloge nadomestimo z eno letno vlogo A

Navadni obrestni račun že poznamo, zato vemo, da je

$$A = a + \frac{a\cdot p\cdot 12}{1200} + a + \frac{a\cdot p\cdot 11}{1200} + a + \frac{a\cdot p\cdot 10}{1200} + \cdots + a + \frac{a\cdot p\cdot 1}{1200}$$

$$A = \frac{a\left(14\,400 + 78p\right)}{1200}$$

Začetno nalogo smo torej prevedli na primer, ko vložimo 5-krat znesek A na koncu (postnumerando) *vsakega leta* in računamo skupen znesek na koncu petega leta (slika 46).



Slika 46: Mesečne vloge so pretvorjene v letne

Bilančno enačbo v tem primeru zapišemo enostavno

$$S = A + Ar + Ar^2 + Ar^3 + Ar^4 = A \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1}$$

Upoštevamo še, kako smo zapisali A in imamo

$$S = \frac{a(14400 + 78p)}{1200} \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1}$$

Od tod sledi iskana vloga a:

$$a = \frac{1200S(r-1)}{(14400 + 78p)\,(r^5 - 1)}$$

in

$$a = \frac{1\,200 \cdot 100000{,}00 \cdot (1{,}05 - 1)}{(14\,400 + 78 \cdot 5)(1{,}05^5 - 1)} = 1.468{,}36 \text{ d.e.}$$

Rezultata pri mesečni in letni kapitalizaciji se razlikujeta le za 0,28 d.e. zgolj zaradi dovolj nizke obrestne mere ($p = 5\%$ p.a.). Pri večji obrestni meri bi bila tudi razlika večja.

♦ ♦ ♦

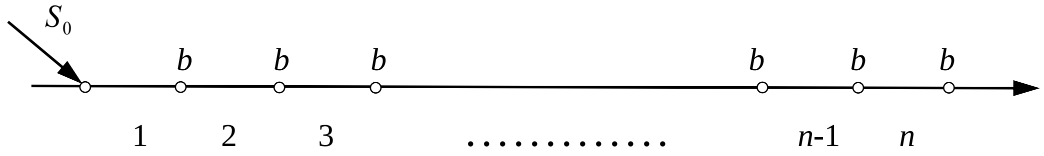
4.4.2.2 Periodični dvigi

Vprašanje, ki so ga zastavimo sedaj, se glasi: koliko moramo vložiti danes (na začetku prvega obdobja), da bi lahko n-krat na koncu (ali na začetku) prvega, drugega, **...** , n-tega obdobja dvignili vsakokrat znesek b in s tem izčrpali celotno vlogo? Takšnim periodičnim enako velikim izplačilom pravimo ***rente***, ki jih dobivamo toliko časa, dokler se *začetni sklad* (*začetna vrednost*) ne izčrpa.

Vzemimo, da je obrestovanje dekurzivno, obrestna mera p% p.a. in kapitalizacija letna. Podobno kot pri periodičnih vlogah imamo tudi tu dve možnosti:

- rente dobivamo na začetku kapitalizacijske dobe (*prenumerando*),
- rente dobivamo na koncu kapitalizacijske dobe (*postnumerando*).

Poglejmo najprej postumerando dvige (slika 47). Dvige označimo z b, začetno vrednost označimo z S_0 .



Slika 47: Postnumerando rente

Vse zneske reducirajmo na začetek prvega leta in dobimo enačbo:

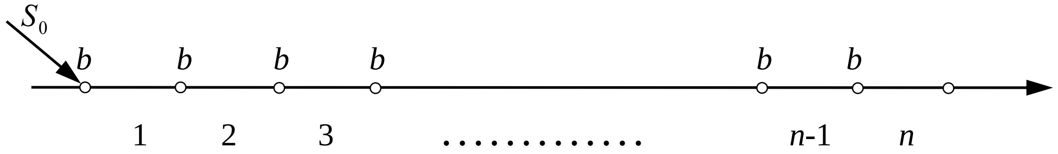
$$S_0 = \frac{b}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{b}{r^3} + \cdots + \frac{b}{r^{n-1}} + \frac{b}{r^n}$$

Na desni strani izpostavimo faktor $\frac{b}{r^n}$ in spet dobimo vsoto geometričnega zaporedja, ki jo že poznamo:

$$S_0 = \frac{b}{r^n}\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right)$$

$$S_0 = b\,\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} \tag{4.35}$$

Pri prenumerando dvigih bomo računali podobno (slika 48).



Slika 48: Prenumerando rente

$$S_0 = b + \frac{b}{r} + \frac{b}{r^2} + \cdots + \frac{b}{r^{n-2}} + \frac{b}{r^{n-1}}$$

$$S_0 = b + \frac{b}{r^{n-1}}\left(r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + r + 1\right)$$

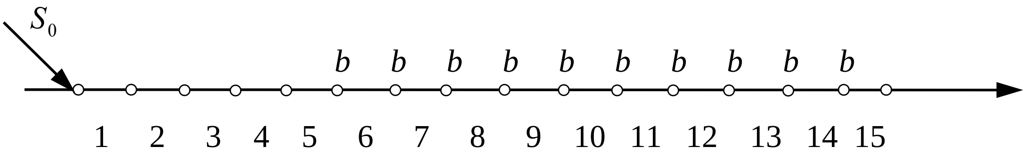
$$S_0 = b + \frac{b}{r^{n-1}} . \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1}$$

in končno

$$S_0 = b\left(1 + \frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-1}(r-1)}\right) \tag{4.36}$$

Primer: Kakšen znesek bi morali vložiti v banko, da bi 10-krat prejeli letno rento po 10.000,00 d.e., če bi prvo rento prejeli čez 5 let od danes. Dekurzivna letna obrestna mera je 8%, kapitalizacija letna.

Rešitev: V tem primeru imamo 5 let zakasnitve do izplačila prve rente. Spet je najbolje narisati dogajanje na časovni premici (slika 49).



Slika 49: Renta z zakasnitvijo

Formule (4.35) ali (4.36) ne moremo direktno uporabiti. Reducirajmo vse glavnice na začetek prvega leta:

$$S_0 = \frac{b}{r^5} + \frac{b}{r^6} + \frac{b}{r^7} + \cdots + \frac{b}{r^{13}} + \frac{b}{r^{14}}$$

$$S_0 = \frac{b}{r^{14}}\left(r^9 + r^8 + \cdots + r + 1\right)$$

$$S_0 = \frac{b}{r^{14}} \cdot \frac{r^{10} - 1}{r - 1}$$

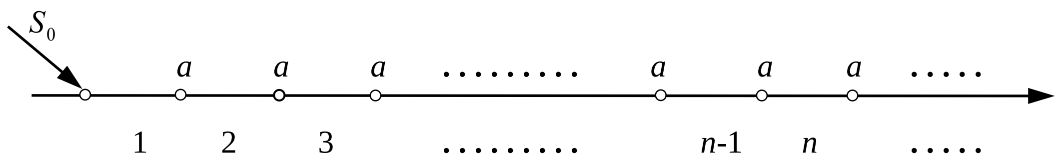
Od tod

$$S_0 = \frac{b}{r^{14}} \cdot \frac{r^{10} - 1}{r - 1} = \frac{10\,000{,}00 \cdot \left(1{,}08^{10} - 1\right)}{1{,}08^{14}\left(1{,}08 - 1\right)} = 49.321{,}10 \text{ d.e.}$$

♦ ♦ ♦

4.4.2.3 Večna renta

Periodična nominalno enaka izplačila, ki jih dobivamo na osnovi nekega začetnega vložka, smo imenovali rente. Število n, to je število izplačanih rent, je znano in praviloma v naprej določeno. Ko se število rent povečuje čez vse meje, torej ko gre teoretično $n \to \infty$, govorimo o ***večni renti*** (slika 50). Ker imamo v tem primeru neskončno mnogo sumandov, predstavlja dobljeni izraz geometrično vrsto.



Slika 50: Večna renta

Če vse zneske reduciramo na začetek prvega obdobja, je

$$S_0 = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \cdots + \frac{a}{r^n} + \cdots$$

$$S_0 = \frac{a}{r}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots\right)$$

V oklepaju dobimo geometrično vrsto s prvim členom $a_1 = 1$ in kvocientom $q = \frac{1}{r}$. Ker je obrestovalni faktor r večji od 1, je $q < 1$ in vrsta je konvergentna.

Njeno vrednost dobimo po znani formuli $S = \frac{a_1}{1-q}$, tako da je

$$S_0 = \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{a}{r-1}$$

Večno rento torej izračunamo po preprosti formuli:

$$S_0 = \frac{a}{r-1} \tag{4.37}$$

<u>Primer:</u>

Nekdo želi ustanoviti sklad, iz katerega bi vsako leto ob koncu leta neomejeno dolgo izplačevali nagrado v znesku 50.000,00 d.e. Kolikšen mora biti začetni vložek, če banka obrestuje vloge po 10% p.a. dekurzivno in letni kapitalizaciji?

<u>Rešitev:</u>

Gre za večno rento $a = 50.000,00$ d.e. Dekurzivni obrestovalni faktor je $r = 1,10$.

Iz formule (4.37) izračunamo

$$S_0 = \frac{a}{r-1} = \frac{50\,000{,}00}{1{,}10-1} = 500.000{,}00 \text{ d.e.}$$

Začetni vložek bi moral biti 500.000,00 d.e.
♦ ♦ ♦

4.4.2.4 Odplačevanje posojil

Velikokrat morajo fizične ali pravne osebe (posamezniki, podjetja, družbe, država,..) najemati posojila (kredite), s katerimi premostijo trenutno pomanjkanje lastnih finančnih sredstev. Te kredite odplačuje kreditojemalec običajno več let v enakih časovnih razdobjih z določenimi zneski - ***anuitetami***. Odplačevanju takšnega kredita pravimo tudi ***amortizacija kredita***.

Kreditni pogoji so vsakokrat določeni z natančno specificirano pogodbo med kreditodajalcem in kreditojemalcem. Obrestovanje je lahko dekurzivno, lahko je pa tudi anticipativno. Časovna obdobja zapadlosti posameznih anuitet so lahko leta, lahko so pa tudi krajša - polletja (semestri), četrtletja (kvartali), meseci.

Vsaka anuiteta je sestavljena iz dveh delov: iz ***obresti*** za obdobje, na koncu katerega je potrebno plačati anuiteto in iz ***razdolžnine*** (ali ***odplačilne kvote***), s katero se dejansko odplačuje osnovno glavnico.

Pri odplačevanju kreditov se seveda pojavijo veliki problemi, ko poteka poslovanje v pogojih hiperinflacije. V takšnih primerih lahko dejansko ukrepamo šele, ko so znane mesečne revalorizacijske obrestne mere, torej za nazaj.

V nadaljevanju bomo privzeli, da imamo opraviti s stabilnimi pogoji poslovanja. Pri odplačevanje posojil imamo tedaj praviloma dve možnosti:

- odplačevanje posojila z enakimi razdolžninami,
- odplačevanje posojila z enakimi anuitetami.

Tako v enem kot v drugem primeru vedno pripravimo ***amortizacijski načrt***, ki vsebuje vse potrebne količine (časovna obdobja, anuitete, obresti, razdolžnine in ostanek dolga) pregledno v tabelarični obliki.

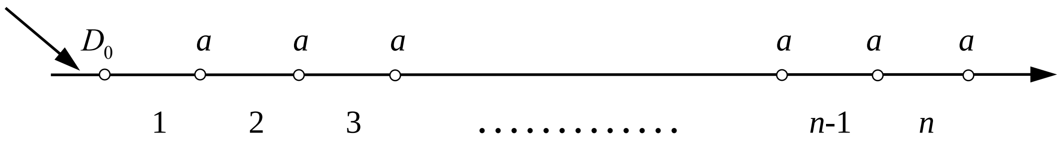
V nadaljevanju si bomo ogledali le drugo možnost, torej odplačevanje kredita z enakimi aniutetami. Bralec za vajo lahko sam ugotovi, kako poteka odplačevanje pri enakih razdolžninah.

Privzeli bomo, da gre za dekurzivno obrestovanje; kako bi naredili amortizacijski načrt pri anticipativnem obrestovanju, bo bralec ugotovil sam. Privzeli bomo še, da anuitete odplačujemo na koncu obrestovalnih obdobij.

Označimo:

D_0	višina najetega kredita (dolg)
a_i	anuiteta, ki zapade v plačilo na koncu *i*-tega obdobja
o_i	obresti za *i*-to obdobje
Q_i	razdolžnina (odplačilna kvota) za *i*-to obdobje
D_i	ostanek dolga po plačilu *i*-te anuitete
n	število anuitet
p	dekurzivna letna obrestna mera

Najeti kredit D_0 moramo skupno s pripadajočimi obrestmi vrniti v n enakih obrokih po a denarnih enot (slika 51).



Slika 51: Odplačevanje kredita D_0 z n anuitetami

Iz slike razberemo:

$$D_0 = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \cdots + \frac{a}{r^n} = a \; \frac{r^n - 1}{r^n (r-1)}$$

Od tod dobimo anuiteto

$$a = \frac{D_0 \, r^n \, (r-1)}{r^n - 1} \tag{4.38}$$

Kako izračunamo obresti in razdolžnine?

V <u>*prvem obdobju*</u> se obrestuje celotni dolg D_0, zato so obresti za prvo obdobje $o_1 = \frac{D_0 \, p}{100}$.

Ker je anuiteta sestavljena iz pripadajočih obresti in pripadajoče razdolžnine, torej velja $a = Q_1 + o_1$, je prva razdolžnina $Q_1 = a - o_1$ in ostanek dolga po plačilu prve anuitete je nato

$$D_1 = D_0 - Q_1$$

V <u>*drugem obdobju*</u> se obrestuje dolg D_1, zato so tedaj obresti $o_2 = \frac{D_1\ p}{100}$ in odplačilna kvota $Q_2 = a - o_2$, ostanek dolga po plačilu druge anuitete pa znaša:

$$D_2 = D_1 - Q_2 = D_1 - (a - o_2) = \left(D_1 + \frac{D_1\ p}{100} \right) - a = D_1\ r - a$$

Podobno dobimo formule za tretji, četrti itd... ostanek dolga. V splošnem lahko ugotovimo zvezo med dvema zaporednima ostankoma dolga:

$$D_{i+1} = D_i - Q_{i+1} \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1 \tag{4.39}$$

Upoštevajmo še, da velja relacija

$$Q_{i+1} = a - o_{i+1} = a - \frac{D_i\ p}{100}$$

in dobimo

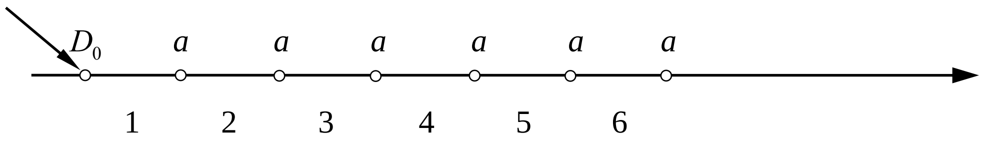
$$D_{i+1} = D_i\ r - a \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1 \tag{4.40}$$

Zaradi preglednosti zapišemo vse dinamično spremenljive količine v tabelo; pravimo, da naredimo ***amortizacijski načrt*** ali ***načrt odplačevanja*** *dolga*.

Amortizacijski načrt

obdobje	anuiteta	obresti	razdolžnina	ostanek dolga
0	-	-	-	D_0
1	a	o_1	Q_1	D_1
2	a	o_2	Q_2	D_2
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
n	a	o_n	Q_n	-
	$\sum a = D_0 + \sum_{i=1}^{n} o_i$	$\sum_{i=1}^{n} o_i$	$\sum_{i=1}^{n} Q_i = D_0$	

<u>Primer:</u>
Vzeli smo kredit 115.000,00 d.e. po 15% letni obrestni meri dekurzivno. Dogovorili smo se, da bomo kredit vrnili v 3 letih v 6 enakih postnumerando polletnih obrokih (anuitetah) in polletnem pripisu obresti (slika 52). Naredimo amortizacijski načrt, če je obračun obresti po konformnem načinu.



Slika 52: Odplačilo dolga D_0 s šestimi enakimi anuitetami

Rešitev:
$D_0 = 115.000{,}00$ d.e., $p = 15\%$ p.a., $n = 6$, $m = 2$ (polletna kapitalizacija)

Polletni dekurzivni konformni obrestovalni faktor izračunamo kot običajno:

$$r_{2,k} = \sqrt{r} = \sqrt{1{,}15} = 1{,}072380529476 \Rightarrow p_{2,k} = 7{,}2380529476\,\%$$

Po formuli (4.38) je anuiteta

$$a = \frac{D_0\, r_{2,k}^6 \left(r_{2,k} - 1\right)}{r_{2,k}^6 - 1} = 24.304{,}10 \text{ d.e.}$$

Sedaj računamo obresti, razdolžnino in ostanek dolga najprej za prvo obdobje in dobimo:

$$o_1 = \frac{D_0\, p_{2,k}}{100} = \frac{115\,000 \cdot 7{,}2380529476}{100} = 8.323{,}76 \text{ d.e.}$$

$$Q_1 = a - o_1 = 24.304{,}10 - 8.323{,}76 = 15.980{,}34 \text{ d.e.}$$

in

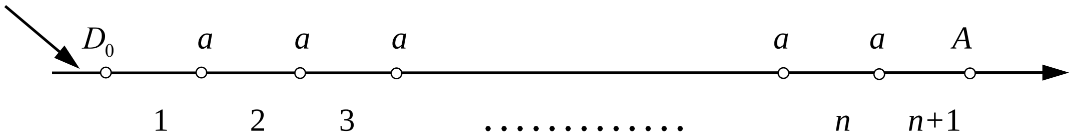
$$D_1 = D_0 - Q_1 = 115.000{,}00 - 15.980{,}34 = 99.019{,}66 \text{ d.e.}$$

Podobno izračunamo obresti, razdolžnine in ostanke dolga za vsa ostala obdobja in nato zapišemo amortizacijski načrt v tabeli:

polletje	anuiteta	obresti	razdolžnina	ostanek dolga
0	0	0	0	115.000,00
1	24.304,10	8.323,76	15.980,34	99.019,66
2	24.304,10	7.167,09	17.137,01	81.882,65
3	24.304,10	5.926,71	18.377,39	63.505,26
4	24.304,10	4.596,54	19.707,56	43.797,70
5	24.304,10	3.170,10	21.134,00	22.663,70
6	24.304,10	1.640,40	22.663,70	0
	145.824,60	30.824,60	115.000,00	

♦ ♦ ♦

Poglejmo si še naslednjo možnost: kreditodajalec in kreditojemalec se dogovorita o višini anuitete, ne da bi jo natanko izračunala, kar v splošnem pomeni, da se odplačilo dolga ne bo izšlo. V tem primeru bomo imeli po odplačilu *n*-te anuitete še nek ***ostanek dolga***, ki ga poravnamo s tako imenovano ***izravnalno anuiteto*** A v dodatnem, to je (n+1)-vem obroku (slika 53). Izračunajmo ta izravnalni obrok A !



Slika 53: Izravnalni obrok A pri odplačilu dolga D_0

Iz slike 53 dobimo enačbo

$$D_0 = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \cdots + \frac{a}{r^n} + \frac{A}{r^{n+1}}$$

Pomnožimo jo z r^{n+1} in upoštevajmo, da je

$$r^n + r^{n-1} + \cdots + r = \frac{r\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

Na ta način dobimo iskani izravnalni obrok

$$A = D_0\, r^{n+1} - a\, r\, \frac{r^n - 1}{r-1} \tag{4.41}$$

<u>Primer:</u> Vzemimo podatke iz prejšnjega primera. Kreditodajalec in kreditojemalec sta se sedaj dogovorila, da naj bo anuiteta po 24.000,00 d.e., razliko pa bo kreditodajalec odplačal s sedmo izravnalno anuiteto. Izdelajmo amortizacijski načrt.

<u>Rešitev:</u> $D_0 = 115.000{,}00$ d.e., $p = 15\%$ p.a. , $n = 6$, $m = 2$, $r_{2,k} = 1{,}072380529476$, $a = 24.000{,}00$ d.e.
Po formuli (4.41) dobimo izravnalno anuiteto

$$A = D_0\, r_{2,k}^{n+1} - a\, r_{2,k}\, \frac{r_{2,k}^n - 1}{r_{2,k} - 1} = 2.346{,}83 \text{ d.e.}$$

Sedaj pa že lahko naredimo amortizacijski načrt po postopku, ki smo ga spoznali v prejšnjem primeru.

Sedmi obrok v tabeli je izravnalna anuiteta. Seveda je tudi izravnalna anuiteta sestavljena iz obresti in razdolžnine, ker je v tabeli lepo razvidno. Zadnja vrstica v tabeli potrjuje, da je rezultat pravilen, saj velja

$$\sum_{i=1}^{7} o_i = 31.346{,}83 \text{ d.e} \qquad \sum_{i=1}^{7} Q_i = 115.000 \text{ d.e.}$$

$$\sum_{i=1}^{7} a_i = D_0 + \sum_{i=1}^{7} o_i = 115.000 \text{ d.e.} + 31.346{,}83 \text{ d.e.} = 146.346{,}83 \text{ d.e.}$$

polletje	anuiteta	obresti	razdolžnina	ostanek dolga
0	0	0	0	115.000,00
1	24.000,00	8.323,76	15.676,24	99.323,76
2	24.000,00	7.189,11	16.810,89	82.512,87
3	24.000,00	5.972,33	18.027,67	64.485,20
4	24.000,00	4.667,47	19.332,53	45.152,67
5	24.000,00	3.268,17	20.731,83	24.420,84
6	24.000,00	1.767,59	22.232,41	2.188,43
7	2.346,83	158,40	2.188,43	0
	146.346,83	31.346,83	115.000,00	

♦ ♦ ♦

4.5 Zvezno obrestovanje

Za kapitalizacijska obdobja, krajša od enega leta, dobimo relativno obrestno mero tako, da osnovno letno obrestno mero *p* % delimo s številom kapitalizacijskih obdobij v enem letu. Ugotovili smo že, da pogostejša kapitalizacija z uporabo ustrezne relativne obrestne mere daje večje obresti kot prvotna letna obrestna mera pri letni kapitalizaciji.

<u>Primer:</u>
Izračunajmo obresti za glavnico 100 d.e. po enem letu, če je obrestna mera 10% p.a. in kapitalizacija:

- letna $(m = 1)$
- polletna $(m = 2)$
- četrtletna $(m = 4)$
- mesečna $(m = 12)$
- dnevna $(m = 365)$

Uporabimo relativno obrestno mero.

<u>Rešitev:</u>
Rezultati so zapisani v tabeli.

m	relativni obrestovalni faktorji	obresti	razlika obresti
1	$\left(1+\frac{10}{100}\right)^{1} = 1{,}1000000$	10,00 d.e.	-
2	$\left(1+\frac{(10/2)}{100}\right)^{2} = 1{,}1025000$	10,25 d.e.	0,25 d.e.
4	$\left(1+\frac{(10/4)}{100}\right)^{4} = 1{,}1038123$	10,38 d.e.	0,13 d.e.
12	$\left(1+\frac{(10/12)}{100}\right)^{12} = 1{,}1047131$	10,47 d.e.	0,09 d.e.
365	$\left(1+\frac{(10/365)}{100}\right)^{365} = 1{,}1051558$	10,52 d.e.	0,05 d.e.
366	$\left(1+\frac{(10/366)}{100}\right)^{366} = 1{,}1051558$	10,52 d.e.	0,00 d.e.

♦ ♦ ♦

Iz primera vidimo, da se letne obresti z naraščajočim m sicer povečujejo, vendar vedno počasneje. Kaj pa se zgodi, če raste število m preko vsake meje, torej če glavnici pripisujemo obresti neprekinjeno, to je zvezno.
Drugače rečeno, želimo izvedeti, kakšna je limita

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{(p/m)}{100}\right)^{m}$$

Postavimo v tej limiti

$$\frac{(p/m)}{100}=\frac{1}{t} \Rightarrow\; m=\frac{t\cdot p}{100}$$

Ko gre $m\to\infty$, gre zaradi zveze med m in t tudi $t\to\infty$ in lahko zapišemo:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{(p/m)}{100}\right)^{m} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{p}{100}} = e^{\frac{p}{100}}$$

Glavnica G_0 naraste po enem letu zveznega pripisovanja obresti na vrednost $G_1 = G_0\, e^{\frac{p}{100}}$,

po dveh letih na vrednost $G_2 = G_0\, e^{\frac{p}{100}.2}$ itd.

Splošno, po n letih naraste začetna glavnica G_0 pri ***zveznem obrestovanju*** (ali ***zvezni kapitalizaciji***) na vrednost

$$G_n = G_0\, e^{\frac{p}{100}.n} \tag{4.42}$$

Pri tem n ni nujno naravno število, lahko je poljubno realno pozitivno število.

Obrazec (4.42) pri obrestovanju glavnic praviloma ni uporabljiv, saj v praksi obresti ne pripisujemo neprekinjeno. Služi lahko za teoretične primerjalne analize v pogojih hiperinflacije, ko bi morali obresti pripisovati že pogosteje kot dnevno.

Pač pa neprekinjeno rast srečamo pri naravnih pojavih, npr. povečanje lesne mase v gozdu, rast mikroorganizmov ipd. Zato pravimo, da (4.42) predstavlja ***zakon naravne rasti***. Pri tem pomeni G_0 začetno vrednost pojava, G_n njegovo vrednost po n letih, število $p/100 = p\%$ pa imenujemo ***stopnja naravne rasti*** tega pojava.

Primer:
Vzemimo, da bi neko glavnico zvezno obrestovali 21 mesecev pri letni obrestni meri 10%. Za koliko % bi se glavnica v tem času povečala?

Rešitev:
Podatki so: n = 1,75 (21 mesecev je 1,75 leta) in $p = 10\%$ p.a. Iščemo razmerje G_n/G_0. Iz formule (4.42) dobimo

$$\frac{G_n}{G_0} = e^{\frac{p}{100}\cdot n}$$

$$\frac{G_{1,75}}{G_0} = e^{\frac{10}{100}\cdot 1,75} = e^{0,10\cdot 1,75} = e^{0,175} = 1,1912$$

Glavnica $G_{1,75}$ je za 1,1912-krat večja od začetne glavnice G_0, kar pomeni, da bi se povečala za 19,12%.

♦ ♦ ♦

Primer:
V gozdu je 100.000 m^3 lesa. Koliko lesa lahko pričakujemo po 10 letih, če je letna stopnja naravne rasti 2% in gozda ves ta čas ne bodo sekali?

Rešitev:
Po zakonu naravne rasti bo čez 10 let

$$G_{10} = G_0\, e^{\frac{p}{100}\cdot 10} = 100\,000.\, e^{0,20} = 122.140,276$$

Čez 10 let pričakujemo 122.140,276 m^3 lesa.

♦ ♦ ♦

Naloge

1. Dne 10. decembra 2011 smo si izposodili 10.000,00 d.e. Kredit smo vrnili 7. februarja 2012. Koliko obresti smo morali plačati, če je obračunavanje po navadnem obrestovanju pri 15% letni obrestni meri?

2. Dne 15. marca 2011 smo si izposodili 10.000,00 d.e., dne 30. julija pa še 20.000,00 d.e. Dolga v letu 2011 nismo vrnili. Koliko obresti smo plačali za leto 2011, če gre za navadno obrestovanje in 10% letno obrestno mero?

3. Dne 15. marca 2011 smo si izposodili 10.000,00 d.e., dne 30. julija pa še 20.000,00 d.e. Celoten dolg smo vrnili 10.decembra 2011. Koliko obresti smo plačali, če gre za navadno obrestovanje in 12% letno obrestno mero?

4. V banko vlagamo 3 leta na začetku vsakega meseca po 5.000,00 d.e. Koliko bomo imeli privarčevano (z obrestmi vred) ob koncu 3. leta, če je obrestovanje navadno pri 10% p.a. ?

5. V banko vlagamo 3 leta na koncu vsakega kvartala po 10.000,00 d.e. Koliko bomo imeli privarčevano (z obrestmi vred) ob koncu 3. leta, če je obrestovanje navadno pri 10% p.a. ?

6. Koliko bi morali vlagati na banko ob začetku vsakega polletja, da bi imeli na koncu 5. leta z obrestmi vred privarčevano 100.000,00 d.e.? Obrestovanje je navadno, letna obrestna mera 8%.

7. Kreditodajalec nam je posodil 100.000,00 d.e. za 3 mesece po 15% letni obrestni meri <u>anticipativno</u> in navadnem obračunu obresti. Koliko gotovine smo prejeli na račun tega kredita? Kolikšen kredit bi morali najeti, da bi prejeli 100.000,00 d.e. gotovine?

8. Na hranilni knjižici v banki, kjer uporabljajo navadni obrestni račun, smo imeli leta 1996 naslednji promet:

Dogodek	Znesek	Dne
vloga	100.000,00 d.e.	28.01.2008
dvig	50.000,00 d.e.	01.03.2008
vloga	150.000,00 d.e.	10.05.2008
dvig	100.000,00 d.e.	10.06.2008
vloga	140.000,00 d.e.	10.10.2008
dvig	80.000,00 d.e.	12.10.2008
dvig	150.000,00 d.e.	20.12.2008

Kakšno je bilo stanje na hranilni knjižici po pripisu obresti dne 31.12.2008, če je obrestna mera 6% p.a.? Stanje izračunaj po progresivni in po stopnjevalni metodi!

9. Neka glavnica se obrestuje dekurzivno 10 let pri letni kapitalizaciji. Pri kateri letni obrestni meri se vrednost glavnice podvoji, če uporabimo
   a) navadni,
   b) obrestno obrestni račun?

10. Neka glavnica se obrestuje dekurzivno po 7% p.a. in pri letni kapitalizaciji V koliko letih se vrednost glavnice potroji, če uporabimo
    a) navadni,
    b) obrestno obrestni račun?

11. Kolikšen znesek dobimo danes, če moramo po treh letih vrniti 500.000,00 d.e. pri anticipativnem obrestovanju in 12% letni anticipativni obrestni meri?

12. Kolika je anticipativna letna obrestna mera, če smo na račun dolga, ki ima čez pet let vrednost 100.000,00 d.e. , danes dobili 90.000,00 d.e.?

13. Katera anticipativna obrestna mera je ekvivalentna dekurzivni obrestni meri $p = 15\%$?

14. Katera dekurzivna obrestna mera je ekvivalentna anticipativni obrestni meri $\pi = 15\%$?

15. Izračunaj polletno, kvartalno, mesečno, tedensko in dnevno relativno in konformno obrestno mero za 36% p.a.!

16. Dne 10.03.2008 smo si izposodili 100.000,00 d.e., dne 30.04.2008 še 150.000,00 d.e., dne 20.05.2008 smo vrnili 200.000,00 d.e., dne 01.07.2008 pa smo vrnili še ostanek ter vse pripadajoče obresti. Koliko smo vrnili, če je dekurzivna obrestna mera 15% p.a. in obračun obresti po konformnem načinu.

17. V banko vlagamo 5 let po 10.000,00 d.e. letno. Kolikšna je skupna končna vrednost vseh vlog po koncu 5. leta pri dekurzivnem obrestovanju, 12% letni obrestni meri in letni kapitalizaciji, če so vloge
    a) prenumerando,
    b) postnumerando ?

18. V banko želimo vlagati 10 let na začetku vsakega meseca vedno enak znesek, tako da bi imeli na koncu 10. leta skupen znesek S = 1.000.000,00 d.e. Kolikšne morajo biti mesečne vloge, če je dekurzivna obrestna mera 12% in je kapitalizacija:
    a) mesečna,
    b) letna?

19. V banko želimo vlagati 5 let na koncu vsakega meseca vedno enak znesek, tako da bi imeli po petih letih skupen znesek S = 1.000.000,00 d.e. Kolikšne morajo biti mesečne vloge, če je dekurzivna obrestna mera 10% in je kapitalizacija:
    a) polletna,
    b) letna?

20. Kakšen znesek bi morali vložiti v banko, da bi 15-krat prejeli letno rento po 10.000,00 d.e., če bi prvo rento prejeli čez 5 let od danes. Dekurzivna obrestna mera je 8% p.a., kapitalizacija letna.

21. V banko vložimo 100.000,00 d.e. Kakšno polletno rento bomo dobivali 20 let (rento torej dobimo 40-krat), če prvo dobimo čez 10 let? Dekurzivna obrestna mera 5% p.a., kapitalizacija pa je
    a) polletna,
    b) letna.

22. Radi bi ustanovili sklad, iz katerega bi vsako leto ob koncu leta neomejeno dolgo izplačevali nagrado v znesku 100.000,00 d.e. Kolikšen mora biti začetni vložek, če banka obrestuje vloge po 5% p.a. dekurzivno in letni kapitalizaciji?

23. Koliko bi znašala večna renta, če bi bil začetni vložek 1.000.000,00 d.e. in pri letni kapitalizaciji obrestna mera:
    a) 3% p.a.,
    b) 6% p.a.?

24. Vzeli smo kredit 200.000,00 d.e. po 12% letni obrestni meri dekurzivno. Dogovorili smo se, da bomo kredit vrnili v 4 letih v 8 enakih postnumerando polletnih obrokih (anuitetah) in polletnem pripisu obresti. Naredi amortizacijski načrt! Obračun obresti po konformnem načinu!

25. V gozdu je 3.000.000 m^3 lesa. Koliko lesa lahko pričakujemo po petih letih, če je letna stopnja naravne rasti 1,5% in gozda ves ta čas ne bodo sekali?

Rešitve

1. $G_0 = 10.000{,}00$ d.e., $p = 15\%$, $d = 59 \Rightarrow o = 242{,}47$ d.e.
   Če pa upoštevamo, da je bilo leto 2012 prestopno, je bolj točno:
   $o = \dfrac{10000 \cdot 21.15}{36500} + \dfrac{10000 \cdot 38 \cdot 15}{36600} = 242{,}04$ d.e.
2. $A = 10.000{,}00$ d.e., $d_1 = 291$, $B = 20.000{,}00$ d.e., $d_2 = 154$, $p = 10\%$,
   $o = o_A + o_B = 1.641{,}10$ d.e.
3. $A = 10.000{,}00$ d.e., $d_1 = 270$, $B = 20.000{,}00$ d.e., $d_2 = 133$, $p = 12\%$,
   $o = o_A + o_B = 1.762{,}19$ d.e.
4. $X = \dfrac{a(43200 + 666p)}{1200} = \dfrac{50000(43200 + 666 \cdot 10)}{1200} = 207.750{,}00$ d.e.
5. $X = \dfrac{a(4800 + 66p)}{400} = 136.500{,}00$ d.e.
6. $a = \dfrac{200X}{2000 + 55p} = 8196{,}70$ d.e.

7. $G_0 = 96.250,00$ d.e.

$G_k = 103.896,10$ d.e.

9. $G_k = 2G_0$, n = 10 let

a) navadni obrestni račun: $G_k = G_0 + \dfrac{G_0 pn}{100} \Rightarrow p = \dfrac{100G_k - 100G_0}{nG_0} = 10\%$

b) obrestno obrestni račun: $G_k = G_0 r^n \Rightarrow p = 100\left(\sqrt[n]{\dfrac{G_n}{G_0}} - 1\right) = 7,18\%$

10. $G_k = 3G_0$, $p = 7\%$ p.a.

a) navadni obrestni račun: $n = \dfrac{100G_k - 100G_0}{pG_0} = 28,57$ let

b) obrestno obrestni račun: $n = \dfrac{\log(G_k / G_0)}{\log r} = 16,24$ let

11. $G_3 = 500.000,00$, $\rho = \dfrac{100}{100 - \pi} = 1,136$, $G_0 = \dfrac{G_3}{\rho^3} = 340.736,00$ d.e.

12. $\pi = 100\left(1 - \sqrt[n]{\dfrac{G_0}{G_n}}\right) = 2,085\%$

13. $\pi = 13,04\%$

14. $p = 17,65\%$

15.

m	relativna obr. mera (%)	konformna obr. mera (%)
1	36,0000	36,0000
2	18,0000	16,6190
4	9,0000	7,9903
12	3,0000	2,5955
52	0,6923	0,5931
365	0,0986	0,0843
366	0,0984	0,0840

16. $A = 100.000,00$, $B = 150.000,00$, $C = 200.000,00$

$d_1 = 113$, $d_2 = 62$, $d_3 = 42$, $r_{366,k} = 1,00038193615$

$X = Ar_{366,k}^{113} + Br_{366,k}^{62} - Cr_{366,k}^{42} = 54.769,70$ d.e.

17. $n = 5$, $m = 1$, $a = 10.000$, $r = 1,12$

a) prenumerando vloge: $S_5 = 71.151,89$ d.e.

b) postnumerando vloge: $S_5 = 63.528,47$ d.e.

18. $n = 10$ let, $p = 12\%$, $S_{10} = 1.000.000,00$ d.e.

a) mesečna kapitalizacija: $r_{12,k} = \sqrt[12]{1,12} = 1,009488792935$

$$a = \frac{S_{10}\,(r_{12,k} - 1)}{r_{12,k}\,(r_{12,k}^{120} - 1)} = 4.463,57 \text{ d.e.}$$

b) letna kapitaliz.: $r = 1,12$; $a = \dfrac{1200\, S\,(r-1)}{(14400 + 78p)(r^{10} - 1)} = 4.458,85$ d.e.

19. $n = 5$ let, $p = 10\%$, $S_5 = 1.000.000{,}00$ d.e.

a) polletna kapitalizacija: $r_{2,k} = \sqrt[2]{1{,}10} = 1{,}04880884817$

$$A = \frac{a(7200 + 15p)}{1200}, \quad A = \frac{S_5(r_{2,k} - 1)}{r_{2,k}^{10} - 1} \Rightarrow A = 79.947{,}66 \qquad a = 13.052{,}68$$

b) letna kapitalizacija : $r = 1{,}10$

$$A = \frac{a(14400 + 66p)}{1200}, \quad A = \frac{S_5(r - 1)}{r^5 - 1} \Rightarrow A = 163.797{,}48 \qquad a = 13.051{,}59$$

20. $p = 8\%$ p.a. , $r = 1{,}08$, $b = 10.000{,}00$ d.e.

$$S_0 = \frac{b(r^{15} - 1)}{r^{19}(r - 1)} = 62.914{,}72 \text{ d.e.}$$

21. $S_0 = 100.000$ d.e., $p = 5\%$ p.a., $n = 20$ let

a) renta polletna, $m = 2$, $r_{2,k} = \sqrt[2]{1{,}05}$ $\qquad b = \dfrac{S_0\, r_{2,k}^{59}\,(r_{2,k} - 1)}{r_{2,k}^{40} - 1} = 6.300{,}00$

b) renta polletna, $m = 1$, $r = 1{,}05$; $B = \dfrac{S_0\, r^{29}(r - 1)}{r^{20} - 1} = 12.448{,}26$ d.e.

$$B = \frac{b(400 - p)}{200} \Rightarrow b = \frac{200B}{400 - p} = 6.302{,}92 \text{ d.e.}$$

22. $a = 100.000{,}00$ d.e., $p = 5\%$ p.a., $m = 1$, $S_0 = 2.000.000{,}00$ d.e.

23. a) $r_1 = 1{,}03 \Rightarrow a_1 = S_0(r_1 - 1) = 30.000{,}00$ d.e.

b) $r_2 = 1{,}06 \Rightarrow a_2 = S_0(r_2 - 1) = 60.000{,}00$ d.e.

25. $G_5 = G_0\, e^{\frac{p}{100}\cdot 5} = 3.233.652{,}5 \quad \text{m}^3$

Grška abeceda

velike črke	male črke	slovensko ime	angleško ime
Α	α	alfa	Alpha
Β	β	beta	Beta
Γ	γ	gama	Gamma
Δ	δ	delta	Delta
Ε	ε	epsilon	Epsilon
Ζ	ζ	ceta	Zeta
Η	η	eta	Eta
Θ	θ	theta	Theta
Ι	ι	jota	Iota
Κ	κ	kapa	Kappa
Λ	λ	lambda	Lambda
Μ	μ	mi	Mu
Ν	ν	ni	Nu
Ξ	ξ	ksi	Xi
Ο	ο	omikron	Omicron
Π	π	pi	Pi
Ρ	ρ	ro	Rho
Σ	σ, ς	sigma	Sigma
Τ	τ	tau	Tau
ϒ	υ	ipsilon	Upsilon
Φ	ϕ, φ	fi	Phi
Χ	χ	hi	Chi
Ψ	ψ	psi	Psi
Ω	ω	omega	Omega

Založniška dejavnost
Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu
I Z D A N E   M O N O G R A F I J E

1. **Poslovna statistika** (e-knjiga)
Usenik, Janez; Vidiček, Matija — 2020
2. **Izbrana poglavja iz matematike** (e-knjiga)
Usenik, Janez — 2020
3. **Vpliv uporabe orodij managerjev na ekonomsko donosnost**
Markič, Mirko; Kreslin, Damijan — 2019
4. **Delovni terapevt v inkluzivni šoli: Trenutno stanje in smernice**
Šuc, Lea — 2019
5. **Zrna odličnosti Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu: nove paradigme organizacijskih teorij 2018**
Bukovec, Boris (ur.) — 2019
6. **Zrna odličnosti Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu: nove paradigme organizacijskih teorij 2017**
Bukovec, Boris (ur.) — 2018
7. **Značilnosti sistemov vodenja kakovosti v slovenskih organizacijah in njihov vpliv na poslovno uspešnost organizacij**
Vinko Bogataj; Gordana Žurga; Adolf Šostar — 2018
8. **Menedžment kakovosti in odličnost zdravnikov v javnem zdravstvu**
Rumpf, Dean; Voga, Gorazd; Meško Štok, Zlatka — 2018
9. **Sistemi vodenja kakovosti in modeli odličnosti: ključni dejavniki (ne)uspešnega delovanja** (e-knjiga)
Škafar, Branko — 2018
10. **Temelji avtopoieze v orgaizaciji: Avtopoietska 4.0 (r)evolucija človeka**
Balažič Peček, Tanja; Bukovec, Boris — 2018
11. **Management varnosti pri delu, delovne razmere in gospodarska učinkovitost** (e-knjiga)
Pavlič, Miran, Markič, Mirko — 2018
12. **Kvalitativno raziskovanje koncepta avtopoieze v organizaciji** (e-knjiga)
Balažic Peček, Tanja — 2018
13. **Podlage in metode za raziskovanje in projektiranje organizacije**
Ivanko, Štefan — 2017
14. **Celostna obravnava dolgotrajne oskrbe v Sloveniji**
Kavšek, Marta; Bogataj, David — 2017

15. **Sodelovalno mreženje in izraba inovacijskega potenciala v turističnem prostoru**
    Colarič-Jakše, Lea-Marija 2017
16. **Model McKinsey 7-S kot kazalnik odličnosti organizacije**
    Kalan, Mateja; Meško, Maja 2017
17. **Nova doktrina organizacije – 2.del: Preusmeritev pozornosti**
    Ovsenik, Jožef; Ovsenik, Marija 2017
18. **Avtopoietska organizacija**
    Bukovec, Boris (ur.) 2017
19. **Kakovost v slovenski javni upravi: Delovanje Odbora za kakovost 1999-2012**
    Žurga, Gordana 2017
20. **Poslovne vrednote mladih v Sloveniji**
    Pinterič, Uroš 2016
21. **Selected topics in modern society** (e-knjiga)
    Kaplánová, Patrícia 2016
22. **Glocalisation of the crisis: could Slovenia survive economic crisis better?** (e-knjiga)
    Pinterič, Uroš 2016
23. **Zrna odličnosti Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu: nove paradigme organizacijskih teorij 2016**
    Bukovec, Boris (ur.) 2016
24. **Pisanje strokovnih in znanstvenih del**
    Brcar, Franc 2016
25. **Education policy as the factor of development** (e-knjiga)
    Pinterič, Uroš 2016
26. **Spregledane pasti informacijske družbe**
    Pinterič, Uroš 2015
27. **Psihosocialni dejavniki tveganja za bolečino v križu pri slovenskih poklicnih voznikih in absentizem**
    Kresal, Friderika; Meško, Maja 2015
28. **Zgodovina organizacijske misli**
    Ivanko, Štefan 2015
29. **Karierno načrtovanje: kako najti v sebi skriti zaklad?**
    Turnšek Mikačić, Marija; Ovsenik, Marija 2015
30. **Sodobni trendi v turizmu**
    Ovsenik, Rok 2015
31. **Selected topics in change management** (e-knjiga)
    Kaplánová, Patrícia (ur.); Pinterič, Uroš (ur.) 2015
32. **Political legacy and youth civic engagement in Slovakia**
    Mihálik, Jaroslav 2015

33. **Turistični prostori različnosti: turizem, turisti in fotografska podoba**
Ambrož, Milan; Bukovec, Boris 2015
34. **Izobraževanje za turizem v Sloveniji**
Ovsenik, Rok; Bukovec, Boris; Ovsenik, Marija 2015
35. **Zrna odličnosti Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu: nove paradigme organizacijskih teorij 2015**
Bukovec, Boris (ur.) 2015
36. **Kontrolna teorija sistemov: model za sistemsko razmišljanje v sistemu zdravstvenega varstva**
Mlakar, Tatjana 2014
37. **Featuring Norden in ten episodes**
Czarny, Ryszard M. 2014
38. **Sociológia mládeže**
Macháček, Ladislav 2014
39. **Inter-municipal cooperation in Slovakia : the case of regions with highly fragmented municipal structure**
Klimovsky, Daniel 2014
40. **Rethinking public policies** (e-izdaja)
Pinterič, Uroš 2014
41. **Local Governance between democracy and efficiency**
Jüptner, Petr. (et al.) 2014
42. **Pasti razumevanja politične realnosti : pregled konceptov sodobnega političnega sistema**
Pinterič, Uroš 2014
43. **Selected issues of administrative reality**
Pinterič, Uroš; Prijon, Lea 2013
44. **Organizacijske paradigme: podlage za nastanek in razvoj organizacijskih teorij**
Ivanko, Štefan 2012