



---

# IZBRANA POGLAVJA IZ MATEMATIKE

---

JANEZ USENIK



Fakulteta za  
organizacijske študije  
Faculty of organisation studies

**prof. ddr. Janez Usenik**

# **Izbrana poglavja iz matematike**

**Novo mesto, 2020**

**Izbrana poglavja iz matematike**  
Janez Usenik

**Strokovna recenzija:**  
Prof. dr. Srečko Devjak  
Prof. dr. Janez Povh

**Jezikovni pregled:**  
Izr. prof. dr. Vida Udovič Medved

**Založila:** Fakulteta za organizacijske študije Novo mesto  
Copyright © 2020 po delih in v celoti avtor in Fakulteta za organizacijske študije v Novem mestu, Novo mesto.

Vse pravice pridržane. Nobenega dela tega gradiva ni dovoljeno kopirati ali reproducirati v kakršnikoli obliki, vključujoč (ne, da bi bilo omejeno na) fotokopiranje, skeniranje, snemanje, prepisovanje brez pisnega dovoljenja avtorja ali druge fizične ali pravne osebe, na katero bi avtor prenesel materialne avtorske pravice.

**Dostop do gradiva:** <https://www.fos-unm.si/si/dejavnosti/zaloznistvo/>

**Katalogni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani**

**COBISS.SI-ID=303885568**  
**ISBN 978-961-6974-44-8 (epub)**  
**ISBN 978-961-6974-45-5 (pdf)**  
**ISBN 978-961-6974-46-2 (mobi)**

# Kazalo vsebine

## 1. VEČKRATNI INTEGRALI

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| 1.1 DVOJNI INTEGRAL                                 | 6  |
| 1.1.1 Definicija dvojnega integrala                 | 6  |
| 1.1.2 Lastnosti dvojnega integrala                  | 7  |
| 1.1.3 Geometrični pomen dvojnega integrala          | 9  |
| 1.1.4 Računanje dvojnega integrala                  | 10 |
| 1.1.5 Uporaba dvojnega integrala                    | 19 |
| 1.1.6 Uvedba novih spremenljivk v dvojnem integralu | 28 |
| 1.2 TROJNI INTEGRAL                                 | 36 |
| 1.2.1 Definicija in računanje trojnega integrala    | 36 |
| 1.2.2 Uvedba novih spremenljivk v trojni integral   | 41 |

## 2. KRIVULJNI IN PLOSKOVNI INTEGRALI

|                                                   |    |
|---------------------------------------------------|----|
| 2.1 KRIVULJNI INTEGRAL                            | 50 |
| 2.1.1 Krivulje v prostoru                         | 50 |
| 2.1.2 Krivuljni integral, definicija in računanje | 62 |
| 2.1.3 Greenov izrek                               | 68 |
| 2.2 PLOSKOVNI INTEGRAL                            | 74 |
| 2.2.1 Ploskve v prostoru                          | 74 |
| 2.2.2 Ploskovni integral, definicija in računanje | 81 |
| 2.2.2.1 Površina ploskve                          | 90 |
| 2.2.3 Gaussov izrek                               | 92 |
| 2.2.4 Stokesov izrek                              | 96 |

## 3. INTEGRALSKE TRANSFORMACIJE

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1 FOURIEROVA TRANSFORMACIJA                                       | 101 |
| 3.1.1 Definicija Fourierove transformacije                          | 101 |
| 3.1.2 Lastnosti Fourierove transformacije                           | 102 |
| 3.1.3 Enotina stopnična/skočna funkcija                             | 106 |
| 3.1.4 Enotina impulzna funkcija                                     | 108 |
| 3.1.5 Tabela nekaterih Fourierovih transformov in računanje z njimi | 110 |

|       |                                                        |     |
|-------|--------------------------------------------------------|-----|
| 3.2   | LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA                              | 112 |
| 3.2.1 | Definicija Laplaceove transformacije                   | 112 |
| 3.2.2 | Lastnosti Laplaceove transformacije                    | 114 |
| 3.2.3 | Tabela nekaterih Laplaceovih transformov               | 120 |
| 3.2.4 | Računanje z Laplaceovo transformacijo in njena uporaba | 121 |
| 3.2.5 | Računanje inverzne Laplaceove transformacije z residui | 128 |

## 4. DISKRETNA ANALIZA

|         |                                                                   |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1     | DISKRETNA FUNKCIJA                                                | 148 |
| 4.1.1   | Prve difference diskretne funkcije                                | 150 |
| 4.1.2   | Diference višjega reda                                            | 157 |
| 4.1.3   | Antidiferenca                                                     | 160 |
| 4.1.4   | Operator progresivnega premika                                    | 163 |
| 4.1.5   | Operator retrogradnega premika                                    | 165 |
| 4.2     | DIFERENČNE ENAČBE                                                 | 166 |
| 4.2.1   | Iterativna metoda reševanja diferenčnih enačb                     | 168 |
| 4.2.2   | Homogene diferenčne enačbe                                        | 169 |
| 4.2.2.1 | Homogena diferenčna enačba s konstantnimi koeficienti             | 170 |
| 4.2.2.2 | Homogena diferenčna enačba 1. reda s spremenljivima koeficientoma | 174 |
| 4.2.3   | Nehomogena diferenčna enačba 1. reda s konstantima koeficientoma  | 175 |
| 4.2.4   | Reševanje diferenčnih enačb z operatorji                          | 178 |
| 4.2.4.1 | Homogena diferenčna enačba                                        | 178 |
| 4.2.4.2 | Nehomogena diferenčna enačba                                      | 180 |
| 4.3     | z-TRANSFORMACIJA                                                  | 183 |
| 4.3.1   | Definicija z-transformacije                                       | 183 |
| 4.3.2   | Zveza med Laplaceovo in z-transformacijo                          | 186 |
| 4.3.3   | Lastnosti z-transformacije                                        | 190 |
| 4.3.4   | Računanje in uporaba z-transformacije                             | 198 |

|               |     |
|---------------|-----|
| <b>TABELE</b> | 203 |
|---------------|-----|

|                   |     |
|-------------------|-----|
| <b>LITERATURA</b> | 209 |
|-------------------|-----|

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| <b>STVARNO IN IMENSKO KAZALO</b> | 210 |
|----------------------------------|-----|

# I

## VEČKRATNI INTEGRALI

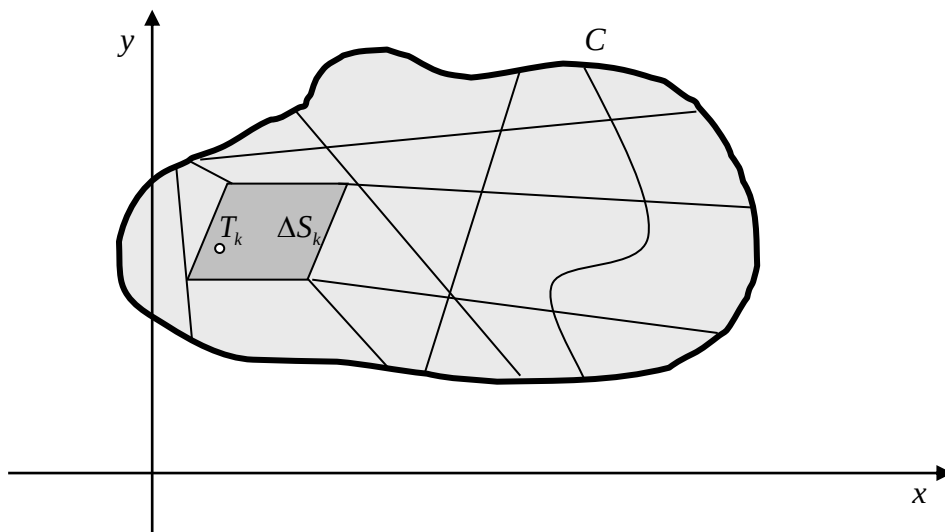
# 1.1 DVOJNI INTEGRAL

## 1.1.1 Definicija dvojnega integrala

Vzemimo funkcijo  $f(x,y)$ , ki naj bo definirana na območju  $D$ , h kateremu štejemo tudi njegov rob (pravimo tudi: ograjo, mejo)  $C$ . Celotno območje s poljubnimi krivuljami razdelimo na  $n$  manjših delov, znotraj vsakega izberimo po eno poljubno točko (slika 1.1).

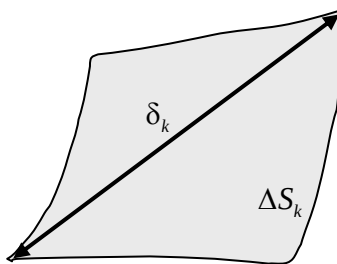
V  $k$ -tem delu ( $k=1,2,\dots,n$ ) naj bo to točka  $T_k=T(\xi_k,\eta_k)$ . Če z  $\Delta S_k$  označimo še ploščino  $k$ -tega dela, lahko tvorimo takšno vsoto:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k \quad (1.01)$$



Slika 1.1: Območje  $D$ , razdeljeno na  $n$  delov

Označimo še z  $\delta_k$  dolžino najdaljše spojnice dveh točk na robu  $k$ -tega dela (slika 1.2), ki ima ploščino  $\Delta S_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$



Slika 1.2: Najdaljša spojnica dveh točk na robu  $k$ -tega dela

Če je še tole res:  $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots, \delta_n\}$ , potem lahko definiramo dvojni integral.

**Definicija:** Dvojni integral funkcije  $f(x, y)$  na območju  $D$  je število  $I$ , ki ga dobimo, ko moremo vsakemu poljubno majhnemu pozitivnemu številu  $\varepsilon$  določiti pozitivno število  $\lambda$  tako, da za vsako poljubno delitev območja  $D$ , za katero je izpolnjen pogoj  $\delta < \lambda$ , velja neenačba  $|I - \Delta| < \varepsilon$ , kjer je  $\Delta$  določena z izrazom 1.(01), torej  $\left| I - \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k \right| \leq \varepsilon$ . Ta pogoj lahko zapišemo tudi v obliki

$$I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k$$

Dvojni integral funkcije  $f(x, y)$  na območju  $D$  označimo takole:  $\iint_D f(x, y) dS$ .

Na osnovi zgornje definicije torej lahko zapišemo relacijo:

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k \quad (1.02)$$

Dvojni integral (1.02) je mogoče primerjati z (doslej znanim) določenim integralom, le da imamo sedaj v integrandu funkcijo dveh spremenljivk. Tudi tu je seveda integral definiran z vsoto neskončno mnogo neskončno majhnih delcev.

## 1.1.2 Lastnosti dvojnega integrala

Iz definicije (1.02) dobimo lastnosti dvojnega integrala, ki so primerljive z lastnostmi že od prej znanega določenega integrala in sledijo iz lastnosti seštevanja.

Če obstajajo dvojni integrali funkcij  $f(x, y)$  in  $g(x, y)$ , potem veljajo naslednje relacije:

1. Vsota funkcij v integrandu

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dS = \iint_D f(x, y) dS \pm \iint_D g(x, y) dS \quad (1.03)$$

To lastnost lahko ugotovimo iz definicije dvojnega integrala (1.02), saj je res tole



$$\begin{aligned}\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)] dS &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(\xi_k, \eta_k) \pm g(\xi_k, \eta_k)] \Delta S_k = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(\xi_k, \eta_k)] \Delta S_k \pm \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [g(\xi_k, \eta_k)] \Delta S_k = \iint_D f(x,y) dS \pm \iint_D g(x,y) dS\end{aligned}$$

## 2. Produkt s konstanto

$$\boxed{\iint_D C \cdot f(x,y) dS = C \cdot \iint_D f(x,y) dS} \quad (1.04)$$

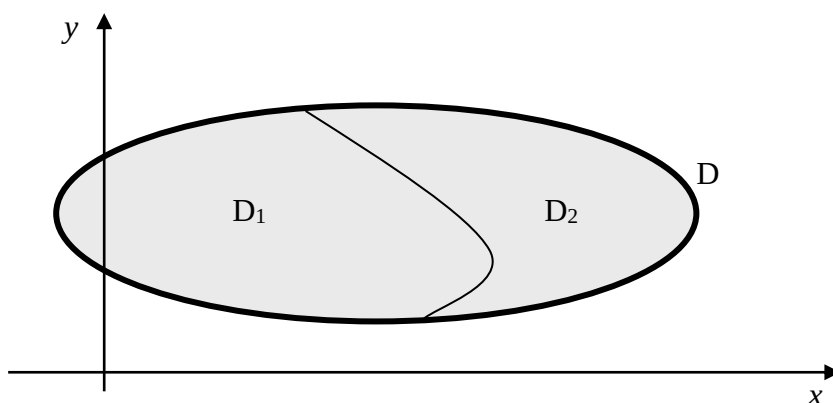
V (1.04) je  $C$  poljubna konstanta. Tudi to lastnost lahko dokažemo brez težav iz definicije dvojnega integrala:

$$\iint_D C \cdot f(x,y) dS = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n C \cdot f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k = C \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k = C \cdot \iint_D f(x,y) dS$$

## 3. Delitev območja

$$\boxed{\iint_D f(x,y) dS = \iint_{D_1} f(x,y) dS + \iint_{D_2} f(x,y) dS} \quad (1.05)$$

To lastnost si lahko predstavimo z grafičnim prikazom (slika 1.3):



Slika 1.3: Delitev območja  $D$  na območji  $D_1$  in  $D_2$

Dokaz spet sledi iz definicije (1.02).

Brez dokaza povejmo še dve lastnosti:

4. Če za vsako točko  $T(x, y)$  velja  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , potem je

$$\iint_D f(x, y) dS \leq \iint_D g(x, y) dS \quad (1.06)$$

5. Absolutna vrednost dvojnega integrala:

$$\left| \iint_D f(x, y) dS \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dS \quad (1.07)$$

### 1.1.3 Geometrični pomen dvojnega integrala

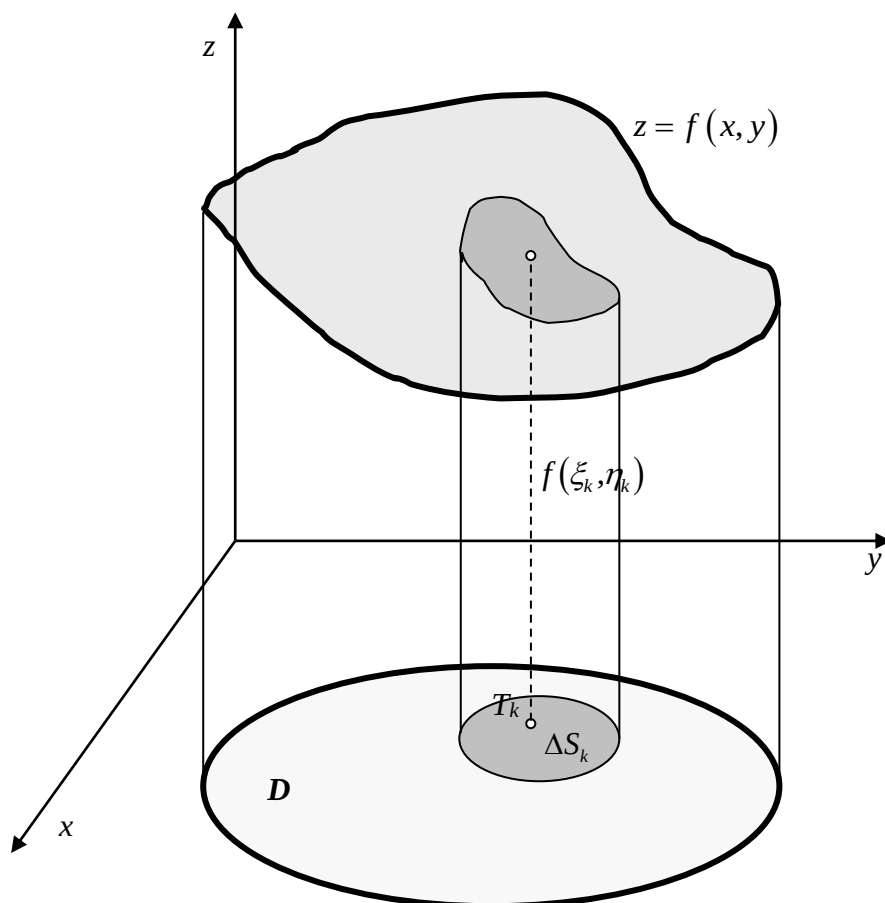
Enačba  $z = f(x, y)$  pomeni neko ploskev v prostoru. Naj bo sedaj funkcija  $f(x, y)$  na območju  $D$  povsod pozitivna. Produkt  $f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k$  v vsoti (1.01) pomeni prostornino prizme z osnovno ploskvijo  $\Delta S_k$  in višino  $f(\xi_k, \eta_k)$ , kar je približno enako prostornini telesa, ki ga določa ploskev nad  $k$ -to parcelo (slika 1.4).

Vsota (1.01) torej pomeni približno prostornino telesa, ki ga določa ploskev  $z = f(x, y)$  nad območjem  $D$ , to je

$$V \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k$$

Ko gre  $\delta \rightarrow 0$  oziroma  $n \rightarrow \infty$ , pa je desna stran po definiciji (1.02) kar dvojni integral funkcije  $z = f(x, y)$ . Torej je dvojni integral te funkcije nad območjem  $D$  kar enak prostornini telesa, določenega s ploskvijo  $z = f(x, y)$  nad območjem  $D$ :

$$V = \iint_D f(x, y) dS \quad (1.08)$$

Slika 1.4: Prostornina telesa z osnovno ploskvijo  $\Delta S_k$ 

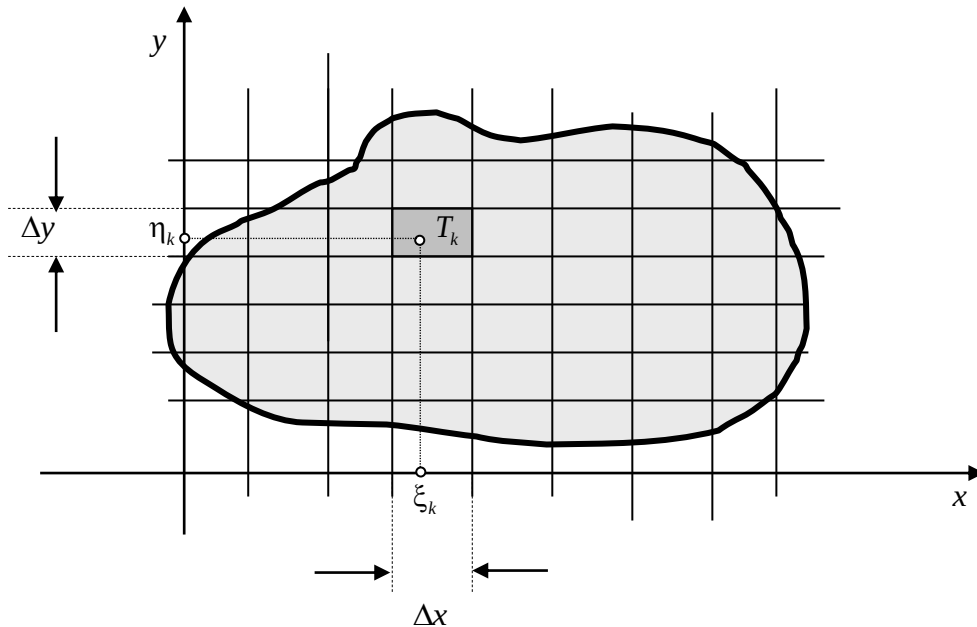
### 1.1.4 Računanje dvojnega integrala

Brez škode za splošnost lahko območje  $D$  razdelimo na parcele kar s premicami, vzporednimi z obema koordinatnima osema (slika 1.5).

Sedaj je  $\Delta S_k = \Delta x \cdot \Delta y$  in v limitnem procesu, ko gre dolžina najdaljše zveznice dveh točk v posameznih parcelah proti 0, je mogoče zapisati  $dS = dx \cdot dy$ .

Določeni integral tedaj zapišemo v obliki, ki jo lahko uporabimo v konkretnih računskih praktičnih primerih:

$$I = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (1.09)$$



Slika 1.5: Območje  $D$ , razdeljeno na  $n$  delov z vzporednicami koordinatnega osi

Sedaj je  $\Delta S_k = \Delta x \cdot \Delta y$  in v limitnem procesu, ko gre dolžina najdaljše zveznice dveh točk v posameznih parcelah proti 0, je mogoče zapisati  $dS = dx \cdot dy$ .

Določeni integral tedaj zapišemo v obliki, ki jo lahko uporabimo v konkretnih računskih praktičnih primerih:

$$I = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (1.09)$$

Vsa pravila (1.03) – (1.07) se seveda ne spremenijo.

Omenimo še *izrek o povprečni vrednosti dvojnega integrala*:

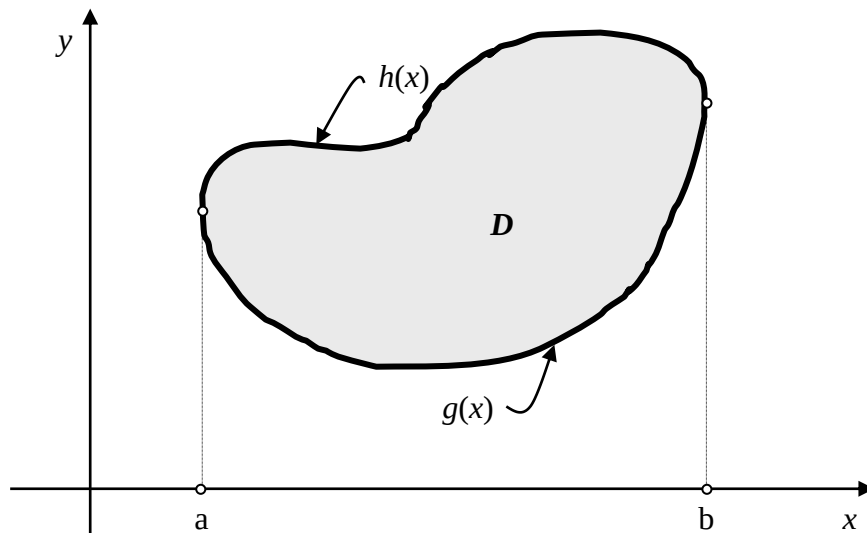
$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) P \quad (1.10)$$

kjer je  $P$  površina območja  $D$ .

Zapis (1.09) sugerira možnost, da dvojni integral funkcije  $f(x, y)$  nad območjem  $D$  izračunamo tako, da ga pretvorimo v dve zaporedni integraciji (v smeri ene in v smeri druge neodvisne spremenljivke), kot bomo videli v nadaljevanju. Dvojni integral bomo spremenili v dvakratni integral.

Naj bo območje  $D$  najprej določeno z naslednjima dvema neenačbama (slika 1.6):

$$D: a \leq x \leq b \quad \text{in} \quad g(x) \leq y \leq h(x)$$



Slika 1.6: Območje  $D$ , določeno s krivuljama  $g(x)$  in  $h(x)$  na intervalu  $[a, b]$

Krivulji  $g(x)$  in  $h(x)$  določata mejo območja  $D$ . Tedaj velja:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (1.11)$$

V (1.11) najprej integriramo notranji integral  $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$ , kjer je integracijska spremenljivka  $y$  in tedaj  $x$  predstavlja konstanto. Rezultat tega integrala je neka funkcija, odvisna od  $x$ , npr.  $F(x)$ , torej

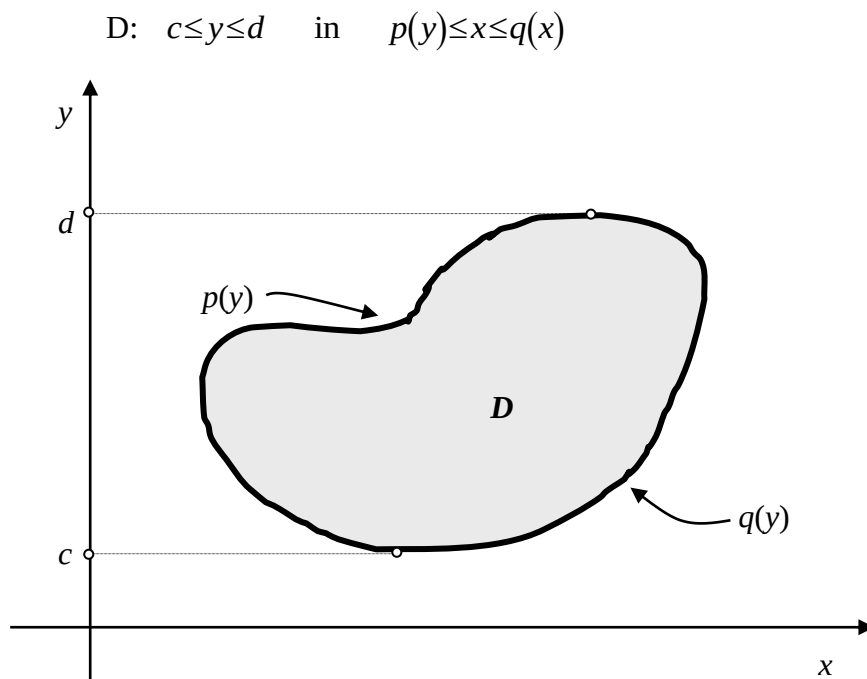
$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

in (1.11) se glasi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b F(x) dx \quad (1.12)$$

Integral (1.12) je določeni integral funkcije  $F(x)$  s spodnjo mejo  $a$  in zgornjo mejo  $b$ , kar že znamo izračunati.

Na podoben način lahko izračunamo dvojni integral, če območje  $D$  omejimo z drugim parom neenačb (slika 1.7):



Slika 1.7: Območje  $D$ , določeno s krivuljama  $p(y)$  in  $q(y)$  na intervalu  $[c, d]$

Tedaj velja:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (1.13)$$

V zapisu (1.13) spet najprej integriramo notranji integral, kjer je integracijska spremenljivka  $x$  in  $y$  tedaj predstavlja konstanto. Rezultat tega integrala je neka funkcija, odvisna od  $y$ , npr.  $G(y)$ , torej

$$G(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx$$

in (1.13) se sedaj glasi:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d G(y) dy \quad (1.14)$$

Integral (1.14) je določeni integral funkcije  $G(y)$  s spodnjo mejo  $c$  in zgornjo mejo  $d$ , ki ga pa že znamo izračunati.

#### Opomba:

Dvojni integral smo zapisali **kot dvakratni integral** in ga tako tudi računamo.

Kar se tiče označevanja, namesto zapisa  $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right] dx$  lahko uporabimo

tudi takšno pisavo:  $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy$ .

Podobno seveda v drugem primeru. Namesto  $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y) dx \right] dy$  dvojni

integral lahko pišemo takole:  $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y) dx$ .

V nekaterih primerih območja  $D$  ne moremo predstaviti z neenačbama, kot smo opisali zgoraj. V takšnih situacijah pa je potrebno v skladu s pravilom (1.05) območje  $D$  razdeliti na manjša (pod)območja in nato na vsakem od njih uporabimo bodisi možnost (1.11) bodisi možnost (1.13). Na vsakem (pod)območju izračunamo dvojni integral in nato posamezne rešitve seštejemo, s čimer dobimo vrednost dvojnega integrala nad celotnim območjem  $D$ .

#### Primer:

Zamenjajmo vrstni red integriranja v integralu  $I = \iint_D f(x,y) dx dy = \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy$ , kjer je torej območje  $D$  določeno s premicami  $y=x, y=2x, x=1, x=2$  (štirikotnik KLMN na sliki).

#### Rešitev:

Območje integriranja  $D$  je takšno:  $1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x$  oziroma  $x \in [1, 2], y \in [x, 2x]$ .

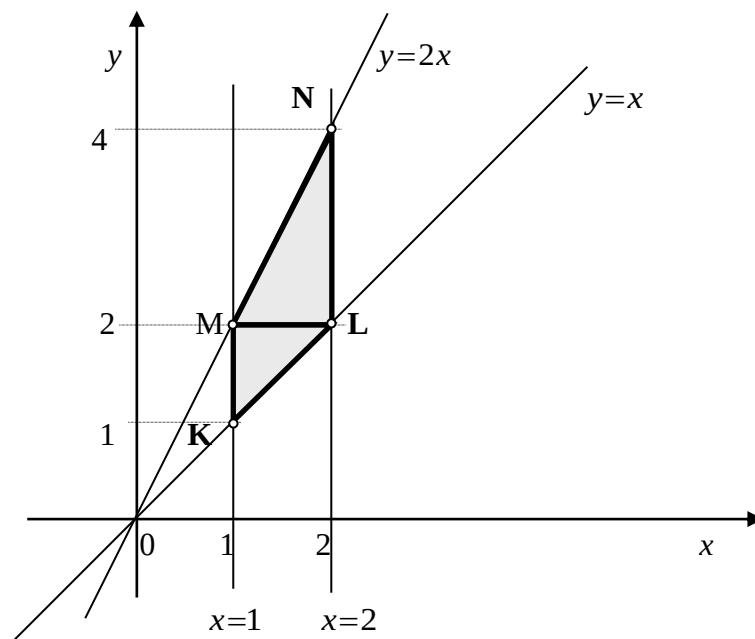
Če pa zamenjamo vrstni red integriranja, moramo lik KLMN razdeliti na dva trikotnika KLM in MLN in vidimo, da je območje  $D$  tedaj sestavljeno iz dveh območij  $D_1$  in  $D_2$ , pri čemer je

$$D_1: y \in [1, 2], x \in [1, y]$$

$$D_2: y \in [2, 4], x \in \left[ \frac{y}{2}, 2 \right].$$

Torej imamo:

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy = \int_1^2 dy \int_1^y f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y) dx$$



Vzemimo, da naj bo  $f(x, y) = 1$ .

V prvem primeru je dvojni integral:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^2 dx \int_x^{2x} dy = \int_1^2 y \Big|_x^{2x} dx = \int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3}{2}$$

Druga možnost pa je

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \int_1^2 dy \int_1^y dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 dx = \int_1^2 x \Big|_1^y dy + \int_2^4 x \Big|_{\frac{y}{2}}^2 dy = \int_1^2 (y-1) dy + \int_2^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy = \\ &= \left(\frac{y^2}{2} - y\right) \Big|_1^2 + \left(2y - \frac{y^2}{4}\right) \Big|_2^4 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Rezultat je seveda enak v obeh primerih.

◆◆◆

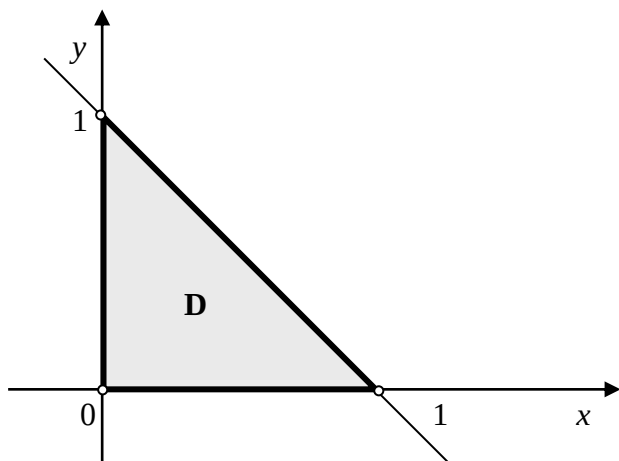
Primer:

Izračunajmo dvojni integral funkcije  $F(x, y) = x + y$  na območju  $D$ , danem s pogoji  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y \leq 1$ .

Rešitev:

V pravokotnem koordinatnem sistemu najprej narišimo območje  $D$ . To območje je omejeno z neenačbama  $0 \leq x \leq 1$  in  $0 \leq y \leq 1 - x$ .





Po formuli (1.11) lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y) dx dy &= \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} (x+y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left[ x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

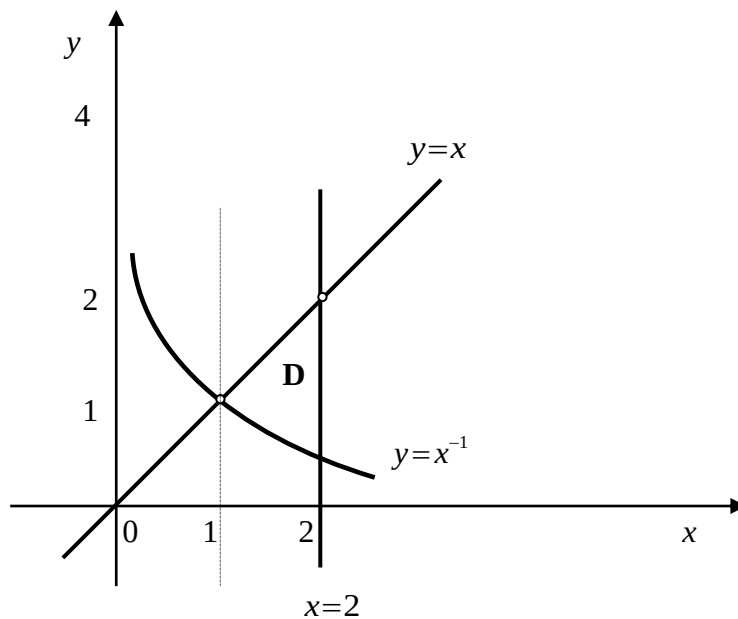
◆◆◆

Primer:

Izračunajmo  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , če je območje  $D$  omejeno s krivuljami  $x=2, y=x, y=\frac{1}{x}$  (slika).

Rešitev:

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 \left( -\frac{1}{y} \right)_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 x^2 \left( -\frac{1}{x} + x \right) dx = \int_1^2 (-x + x^3) dx = \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{4}$$



Primer:

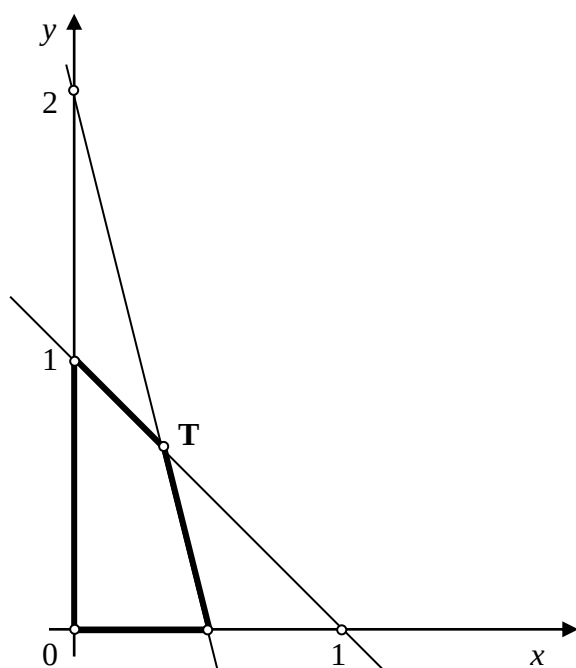
Izračunajmo dvojni integral funkcije  $F(x,y)=x+y$ , če je območje  $D$  določeno s pogoji  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x+y \leq 1$  in  $y+4x \leq 2$ .

Rešitev:

Tudi sedaj najprej narišimo območje  $D$ .

Vidimo, da bo sedaj potrebno območje  $D$  razdeliti na več delov (na dva ali na tri), pri čemer upoštevamo, da je točka  $T$  kot presečišče premic  $x+y \leq 1$  in  $y+4x \leq 2$  dana s koordinatama

$$T\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

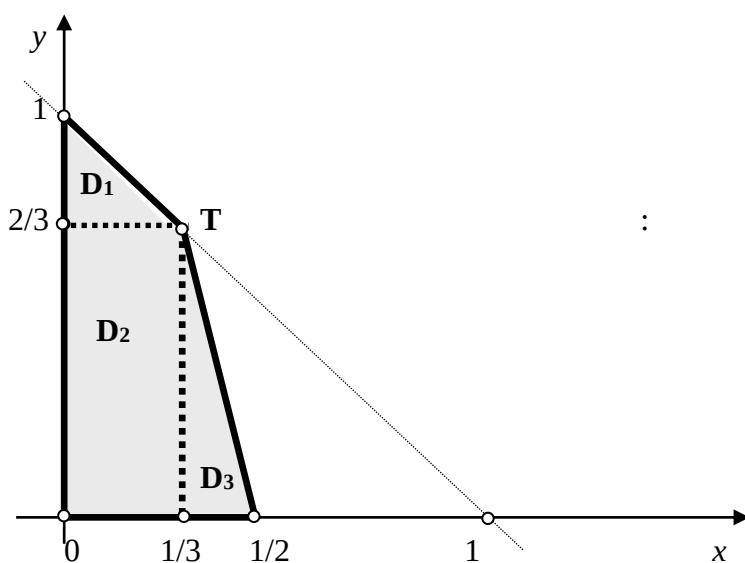


Vzemimo, da smo območje razdelili na tri dele takole:

$$\text{Območje } D_1: 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq y \leq 1-x$$

$$\text{Območje } D_2: 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq y \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{Območje } D_3: \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq 2-4x$$



Od tod dobimo tri dvojne integrale:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ \int_{\frac{2}{3}}^{1-x} (x+y) dy \right] dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{2}{3}}^{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} - \left( \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \right) \right] dx = \\
 &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{5}{18} - \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[ \frac{5x}{18} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{81}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ \int_0^{\frac{2}{3}} (x+y) dy \right] dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{2}{3}} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right] dx = \left[ \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^{2-4x} (x+y) dy \right] dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-4x} dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left[ x(2-4x) + \frac{(2-4x)^2}{2} \right] dx = \\
 &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (2-6x+4x^2) dx = \left[ 2x - 3x^2 + \frac{4x^3}{3} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{324}
 \end{aligned}$$

Iskani dvojni integral je vsota vseh treh:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{81} + \frac{1}{9} + \frac{11}{324} = \frac{63}{324} = \frac{7}{36}.$$

◆◆◆

## 1.1.5 Uporaba dvojnega integrala

Dvojni integral ima mnogo geometrijskih in fizikalno-tehničnih možnosti uporabe. Oglejmo si možnosti za računanje ploščine lika, prostornine telesa, težišča telesa in vztrajnostnega momenta telesa.

### 1.1.5.1 Ploščina lika

Ploščino lika (območja)  $D$  dobimo iz geometrijske interpretacije dvojnega integrala (1.08), ko za funkcijo vzamemo konstanto ena,  $f(x, y) = 1$ . Volumen prizme z višino ena (merska enota) je številčno kar enak ploščini osnovne ploske, torej velja

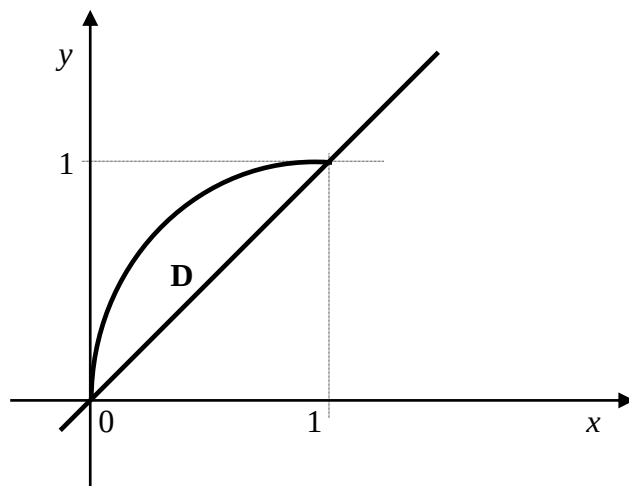
$$S = \iint_D dx dy \quad (1.15)$$

#### Primer:

Izračunajmo ploščino lika, omejenega s premico  $y=x$  ter parabolo  $y^2=x$ .

#### Rešitev:

Na sliki vidimo, za kakšen lik gre in kakšne so meje za integriranje v smeri ene in druge smeri.



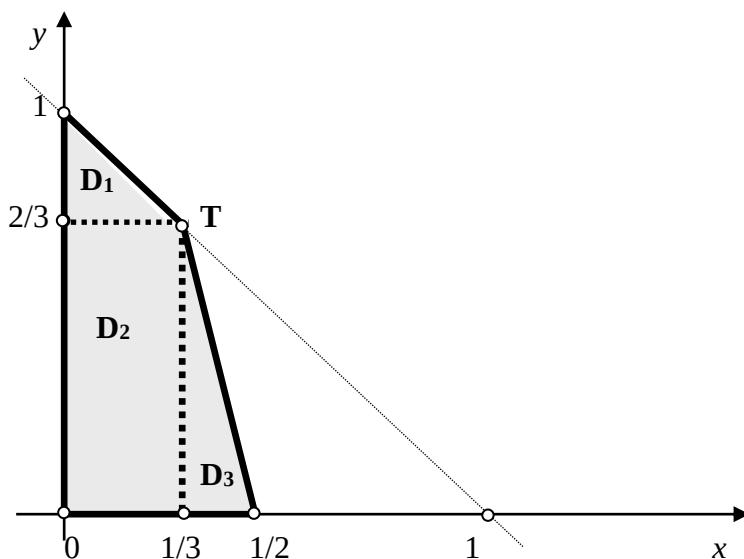
Območje  $D$  razberemo iz slike:  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [x, +\sqrt{x}]$ . Potem je ploščina:

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 y \Big|_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \frac{1}{6}$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo ploščino lika iz enega od prejšnjih primerov (slika).



Posamezna območja so takšna:

$$D_1: x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], y \in \left[\frac{2}{3}, 1-x\right]$$

$$D_2: x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], y \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$D_3: x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], y \in [0, 2-4x]$$

Posamezne ploščine so:

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ \int_{\frac{2}{3}}^{1-x} dy \right] dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ y \right]_{\frac{2}{3}}^{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{3} - x \right) dx = \frac{1}{18}$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ \int_0^{\frac{2}{3}} dy \right] dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ y \right]_0^{\frac{2}{3}} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} dx = \frac{2}{9}$$

$$S_3 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^{2-4x} dy \right] dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left[ y \right]_0^{2-4x} dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (2-4x) dx = \left( 2x - 2x^2 \right) \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{18}$$

Skupna ploščina pa je:  $S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

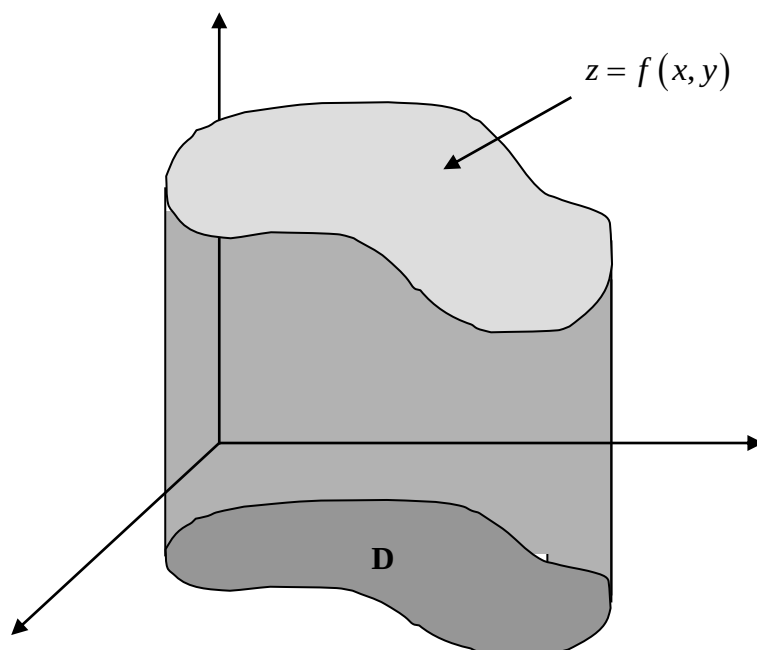
◆◆◆

### 1.1.5.2 Prostornina telesa

Prostornina telesa omejenega s ploskvijo  $z = f(x, y)$  in pripadajočim območjem  $D$  na ravnini  $(x, y)$ , je (slika 1.8):

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

(1.16)



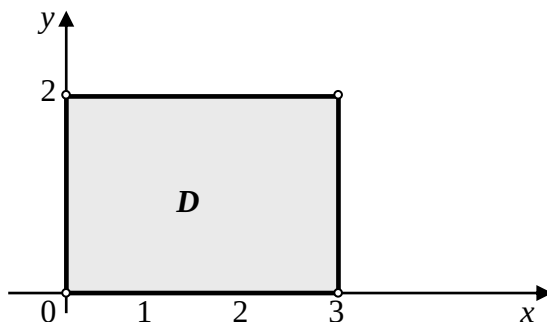
Slika 1.8: Prostornina telesa

#### Primer:

Izračunajmo prostornino telesa, ki ga tvori prostorska ploskev z enačbo  $z = 4x^2 + 9y^2$  nad osnovno ploskvijo  $D$  na ravnini  $(x, y)$ , pri čemer je območje  $D$  pravokotnik z oglišči  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(3, 2)$  in  $(0, 2)$ .

#### Rešitev:

Osnovna ploskev  $D$  na ravnini  $(x, y)$  je prikazana na spodnji sliki.



Prostornino telesa bomo izračunali po formuli (1.16)

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (4x^2 + 9y^2) dx dy = \int_0^3 \left( \int_0^2 (4x^2 + 9y^2) dy \right) dx = \\ &= \int_0^3 \left( 4x^2 y + \frac{9y^3}{3} \right) \Big|_0^2 dx = \int_0^3 (8x^2 + 24) dx = \left( \frac{8x^3}{3} + 24x \right) \Big|_0^3 = 144 \end{aligned}$$

Seveda bi enak rezultat dobili, če bi integrirali najprej po  $x$  in šele nato po  $y$ .

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (4x^2 + 9y^2) dx dy = \int_0^2 \left( \int_0^3 (4x^2 + 9y^2) dx \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left( \frac{4x^3}{3} + 9y^2 x \right) \Big|_0^3 dy = \int_0^2 (36 + 27y^2) dy = \left( 36y + \frac{27y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 144 \end{aligned}$$

◆◆◆

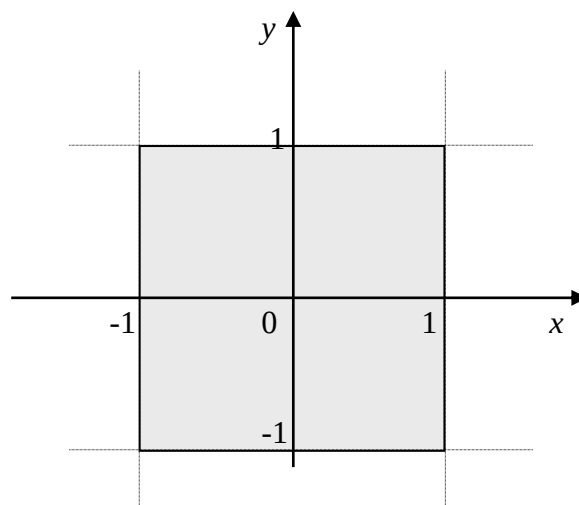
Primer:

Izračunajmo prostornino telesa, omejenega s ploskvijo  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  v mejah  $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$  in  $z = 0$ .

Rešitev:

Na ravnini  $(x, y)$  je območje  $D$  pravokotnik in prostornina telesa bo:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (4 - x^2 - y^2) dy = \int_{-1}^1 \left( 4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{22}{3} - 2x^2 \right) dx = \left( \frac{22}{3} x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

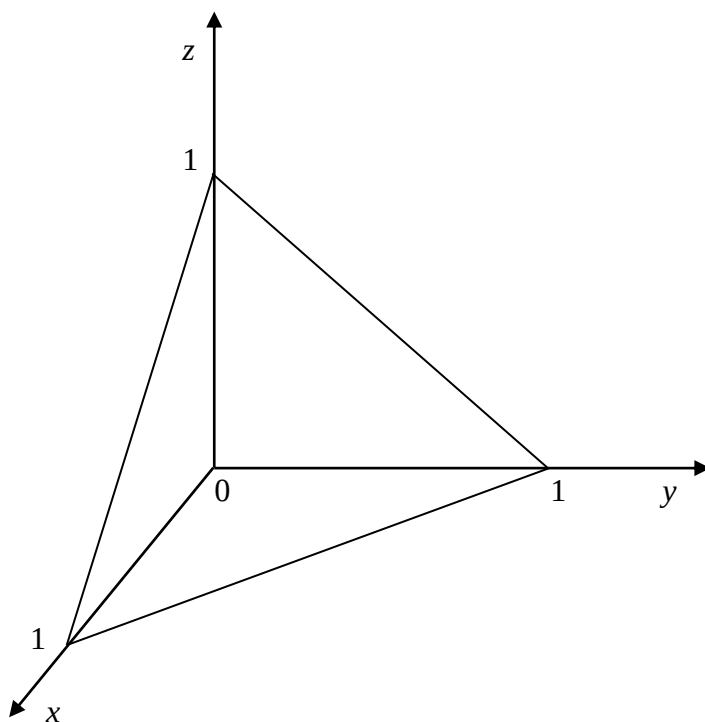


◆◆◆

Primer:

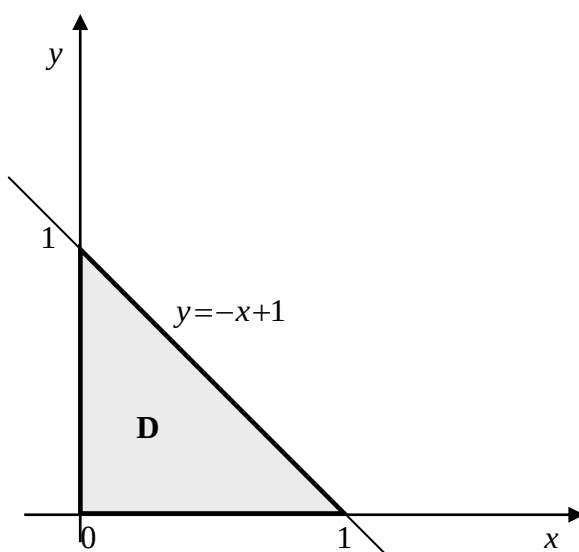
Izračunajmo prostornino telesa, omejenega s ploskvijo  $x+y+z=1$  za  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  (prvi oktant).

Rešitev: Računamo prostornino piramide, kot vidimo na spodnji sliki.



Osnovna ploskev piramide na ravnini  $(x, y)$  je trikotnik, omejen s koordinatnima osema in premico  $x + y = 1$ .

Območje  $D$  je določeno tako:  $x \in [0, 1], y \in [0, -x+1]$





Iz obeh slik vidimo meje integrala in po formuli (1.16) velja:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} (1-x-y) dy = \int_0^1 \left( y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{-x+1} = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left( \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

◆◆◆

### 1.1.5.3 Težišče

Naj pomeni  $f(x,y)$  gostoto mase (to je masa na ploščinsko enoto) na ravnini  $(x,y)$ . Skupna masa  $M$  na območju  $D$  je potem

$$M = \iint_D f(x,y) dx dy \quad (1.17)$$

Težišče te mase na območju  $D$  je dano s koordinatama:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{M} \iint_D x f(x,y) dx dy \\ y_T &= \frac{1}{M} \iint_D y f(x,y) dx dy \end{aligned} \quad (1.18)$$

### 1.1.5.4 Vztrajnostni moment

Vztrajnostni moment mase, za katero poznamo njeno gostoto  $f(x,y)$  na območju  $D$ , je glede na os  $x$

$$J_x = \iint_D y^2 f(x,y) dx dy \quad (1.19)$$

in glede na os  $y$ :

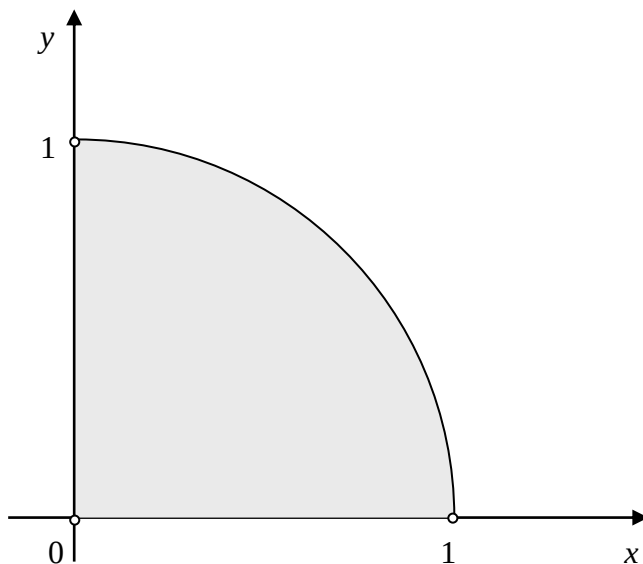
$$J_y = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy \quad (1.20)$$

Primer:

Izračunajmo težišče in vztrajnostna momenta območja  $D$ , če je na njem dana gostota mase  $f(x, y) = 1$ . Območje  $D$  naj bo določeno s pogoji:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ .

Rešitev:

Območje  $D$  je četrtina kroga (v prvem kvadrantu) s polmerom 1 (slika).



Maso območja  $D$  izračunamo po formuli (1.17)

$$M = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D 1 \cdot dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Nedoločeni integral  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  rešimo s substitucijo  $x = \sin t$  oziroma  $t = \arcsin x$ . Od tod je  $dx = \cos t dt$  in

$$I = \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt$$

Zaradi  $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$  je ta nedoločeni integral

$$I = \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C$$

Ko zapišemo  $t = \arcsin x$ , dobimo

$$I = \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C$$

Torej je iskana masa  $M$ :

$$M = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = I = \left( \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) \right)_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Za koordinati težišča območja  $D$  uporabimo formulo (1.18):

$$x_T = \frac{1}{M} \iint_D x f(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \iint_D x dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy \right] dx = \frac{4}{\pi} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

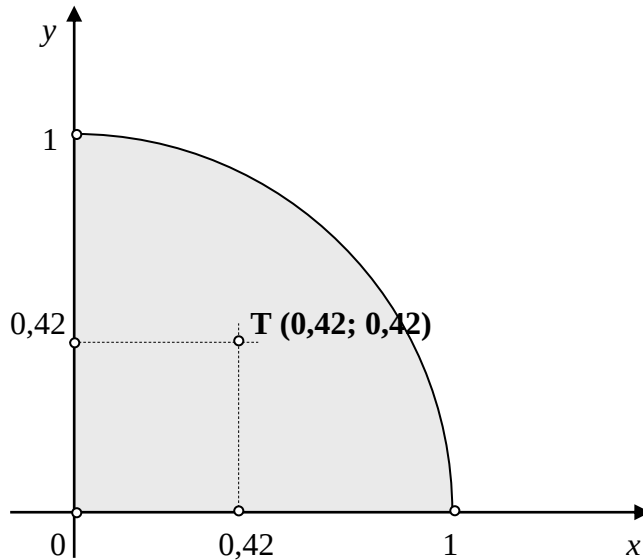
Nedoločeni integral  $\int x \sqrt{1-x^2} dx$  rešimo s substitucijo  $t = 1-x^2$  in dobimo

$$x_T = \frac{4}{\pi} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

Ordinata težišča:

$$y_T = \frac{1}{M} \iint_D y f(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right] dx = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

Težišče območja  $D$  je torej v točki  $T\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$ . Zaokroženo na dve decimalki ( $\frac{4}{3\pi} \approx 0,42$ ) je iskano težišče v točki s koordinatama  $T(0,42, 0,42)$ , kar je grafično prikazano na spodnji sliki.



Izračunajmo še vztrajnostni moment. V ta namen uporabimo formulo (1.19):

$$J_x = \iint_D y^2 f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \left( \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$$

Nedoločeni integral  $I = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$  bomo rešili s substitucijo  $x = \sin t$ . Tedaj je  $dx = \cos t dt$ , spremenita se seveda tudi meji: spodnja meja je 0 za spremenljivko  $x$ , torej je zaradi  $0 = \sin t \Rightarrow t = 0$  spodnja meja sedaj za spremenljivko  $t$  tudi 0; novo zgornjo mejo dobimo podobno: za spremenljivko  $x$  je zgornja meja 1, zato iz  $1 = \sin t$  vidimo, da je zgornja meja za spremenljivko  $t$  torej  $\frac{\pi}{2}$ .

O tod

$$J_x = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin^2 t)^3} \cos t dt = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt$$

Zaradi  $\int \cos^4 t dt = \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + C$  dobimo

$$J_x = \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

Na podoben način po formuli (1.20) izračunamo še

$$J_y = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right] dx = \frac{\pi}{16}$$

Seveda sta vztrajnostna momenta pri rotaciji glede na os  $x$  in na os  $y$  enaka, saj je lik simetričen glede na obe koordinatni osi.

◆◆◆

## 1.1.6 Uvedba novih spremenljivk v dvojnem integralu

Pri uporabi dvojnega integrala v praktičnih primerih pogosto pride do zahteve, ko moramo zaradi poenostavitve v dvojnem integralu vpeljati novi spremenljivki. Če v dvojni integral namesto spremenljivk  $x$  in  $y$  vpeljemo novi spremenljivki  $u$  in  $v$ , torej  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , velja relacija

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (1.21)$$

Integracijski spremenljivki  $x$  in  $y$  sta izraženi z novima spremenljivkama  $u$  in  $v$ , diferenciala  $dx$  in  $dy$  pa sta izražena z  $du$  in  $dv$ ,

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

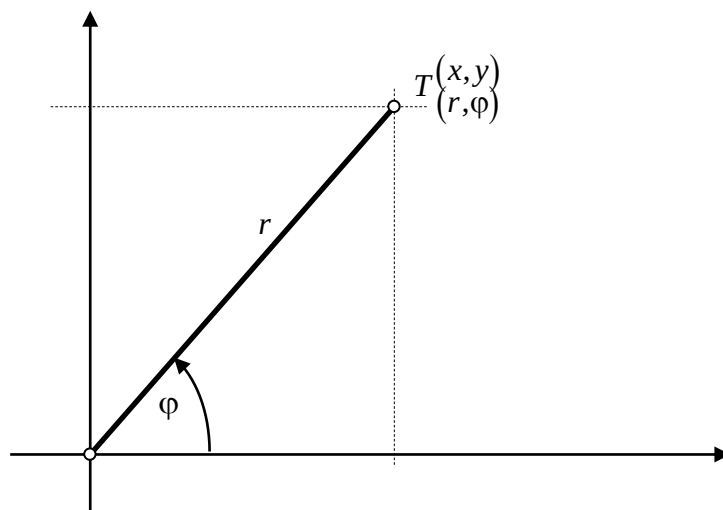
Tu je  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  absolutna vrednost **Jacobijeve<sup>1</sup> determinante  $J$**

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

<sup>1</sup> Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851), nemški matematik

Zaradi uvedbe novih spremenljivk se seveda spremeni tudi območje integriranja. Za spremenljivki  $x$  in  $y$  smo območje označili z znakom  $D$ , za spremenljivki  $u$  in  $v$  pa ga označimo z znakom  $D^*$ .

V konkretnih primerih velikokrat uvedemo polarni koordinati  $r$  in  $\varphi$ . Vemo, da v tem primeru med pravokotnima in polarnima koordinatama velja naslednja zveza  $x=r\cos\varphi$ ,  $y=r\sin\varphi$ .



Jacobijeva determinanta je:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

$$\boxed{J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r} \quad (1.23)$$

Formula (1.21) se v tem primeru glasi

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi} \quad (1.24)$$

V formuli (1.24) je  $D^*$  območje na ravnini  $(r, \varphi)$ , ki ustreza območju  $D$  na ravnini  $(x, y)$ .

Primer:

V prejšnjem primeru smo izračunali vztrajnostna momenta četrtnine kroga. Integriranje je bilo dolgotrajno in neprijazno. Rezultat dobimo mnogo enostavneje z uvedbo polarnih koordinat  $x=r\cos\varphi$ ,  $y=r\sin\varphi$ . Novi spremenljivki določata integracijsko območje  $D^*$  takole:  $r \in [0,1]$

in  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Sedaj bo:

$$\begin{aligned} J_x &= \iint_D y^2 dx dy = \iint_{D^*} (r \sin \varphi)^2 r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \left[ \left( \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Na podoben način dobimo tudi  $J_y$ .

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo dvojni integral funkcije  $f(x,y)=x^2+y^2$  nad območjem  $D$ , ki ga vidimo na spodnji sliki.

Rešitev:

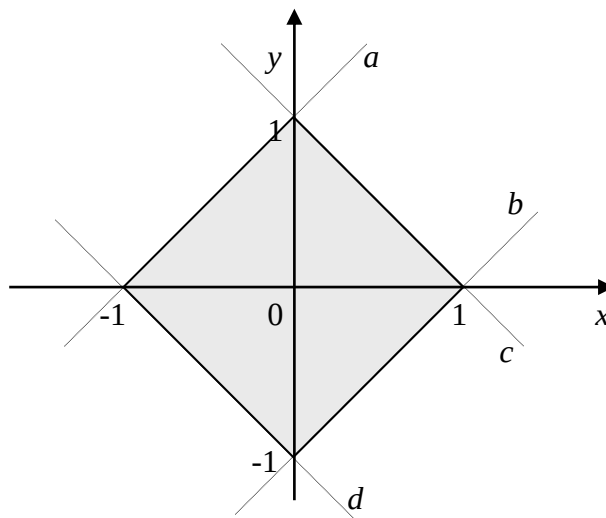
Območje  $D$  je omejeno s štirimi premicami, ki smo jih označili zaporedoma z znaki  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in  $d$ . Enačbe teh premic so po vrsti naslednje

Premica  $a$ :  $y=x+1$  oziroma  $x-y=-1$

Premica  $b$ :  $y=x-1$  oziroma  $x-y=1$

Premica  $c$ :  $y=-x+1$  oziroma  $x+y=1$

Premica  $d$ :  $y=-x-1$  oziroma  $x+y=-1$

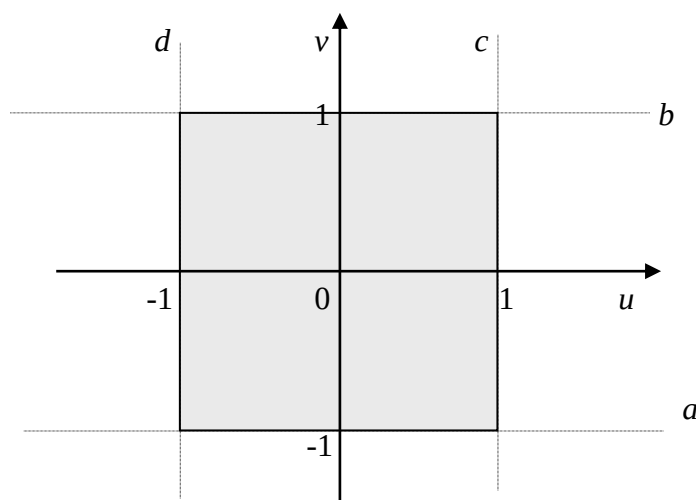


Vidimo, da imamo na levi strani enačb premic izraza  $(x+y)$  ali pa  $(x-y)$ , na desni pa konstanto 1 ali -1. Zato bo smiselno vpeljati novi spremenljivki  $u$  in  $v$  takole:

$$u=x+y \text{ in } v=x-y.$$

Na ta način se enačbe teh premic v koordinatah  $(u,v)$  precej poenostavijo. Premica  $a$  ima sedaj enačbo  $v=-1$ , premica  $b$  ima enačbo  $v=1$ , premica  $c$  ima enačbo  $u=1$  in premica  $d$  ima enačbo  $u=-1$ .

Območje  $D$  na ravnini  $(x,y)$  smo s to substitucijo pretvorili v območje  $D^*$  na ravnini  $(u,v)$ , kar vidimo na spodnji sliki.



Iz substitucije  $u=x+y$  in  $v=x-y$  dobimo:

$$x=\frac{u+v}{2} \text{ in } y=\frac{u-v}{2}$$

Parcialni odvodi so zaporedoma

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2} \text{ in } \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{2}$$

Še Jacobijeva determinanta

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

Od tod izračunamo:



$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_D \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (u^2 + v^2) du dv = \\
&= \frac{1}{4} \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u^2 du dv + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v^2 du dv \right] = \frac{1}{4} \left[ \int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 dv + \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 v^2 dv \right] = \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^1 \cdot v \Big|_{-1}^1 + u \Big|_{-1}^1 \cdot \frac{v^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right] = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo prostornino telesa, omejenega s koordinatno ravnino  $(x, y)$  in ploskvijo (ravnino) v prostoru  $f(x, y) = x - y + 4$ , če je območje  $D$  na ravnini  $(x, y)$  krog, ki ga omejuje krožnica z enačbo  $x^2 + y^2 = 1$ .

Rešitev:

Telo, katerega prostornino računamo, je prisekani valj, njegova osnovna ploskev na ravnini  $(x, y)$  je krog s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 1.

Območje  $D$  je dano z mejama:  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ . Ker pa je območje  $D$  krog s središčem v koordinatnem izhodišču, ki je simetričen na osi  $x$  in  $y$ , ga lahko poenostavimo tako, da v integralu vzamemo za meji samo eno četrtino kroga v prvem kvadrantu, nato pa upoštevamo, da je celotno območje  $D$  štirikrat večje.

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (4+x-y) dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (4+x-y) dy$$

Rešimo ta integral.

$$V = 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (4+x-y) dy = 4 \int_0^1 \left[ 4y + xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 4\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx$$

Posamezne integrale rešimo posebej kot nedoločene. Prvega  $I_1 = \int \sqrt{1-x^2} dx$  uženemo s substitucijo:  $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$ .

Od tod je:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\
&= \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C
\end{aligned}$$

Drugi integral  $I_2 = \int x\sqrt{1-x^2} dx$  rešimo s substitucijo:  $t=1-x^2 \Rightarrow dt=-2x dx$ .

$$I_2 = \int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C$$

Tretji integral  $I_3 = \int \frac{1-x^2}{2} dx$  je elementaren:

$$I_3 = \int \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{3} \right) + C$$

Od tod je

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^1 \left( 4\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx = \\ &= 4 \left[ 2 \left( \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + \left( -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \right) - \left( \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \right) \right]_0^1 = 4\pi \end{aligned}$$

Rešitev pa dobimo precej enostavneje in hitreje, če v dvojni integral uvedemo novi spremenljivki. Ker je osnovna ploskev krog, bosta v ta namen pripravi polarni koordinati  $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ . Jacobijeva determinanta v tem primeru je  $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$ .

Meji sta sedaj konstantni, med 0 in  $2\pi$  za kot  $\varphi$  in med 0 in 1 za  $r$ .

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D^*} (4-r\cos\varphi-r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (4-r\cos\varphi-r\sin\varphi) r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{4r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \cos\varphi - \frac{r^3}{3} \sin\varphi \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( 2 - \frac{1}{3} \cos\varphi - \frac{1}{3} \sin\varphi \right) d\varphi = \\ &= \left( 2\varphi - \frac{1}{3} \sin\varphi + \frac{1}{3} \cos\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo prostornino telesa, omejenega z ravnino  $(x, y)$  in krivuljo v prostoru  $f(x, y) = x^3$  nad območjem  $D$ , ki ga določa krožnica z enačbo  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Rešitev:

Tudi tu bomo vpeljali polarni koordinati s substitucijo  $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ . Jacobijeva determinanta je  $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$ . Območje  $D^*$  je določeno tako:  $r \in [0, a]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

$$\begin{aligned} V &= \iint_D x^3 dx dy = \iint_{D^*} r^3 \cos^3 \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^4 \cos^3 \varphi dr = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{r^5}{5} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^a d\varphi = \frac{4a^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4a^5}{5} \left( \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a^5}{15} \end{aligned}$$

Opomba:  $\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ .

◆◆◆

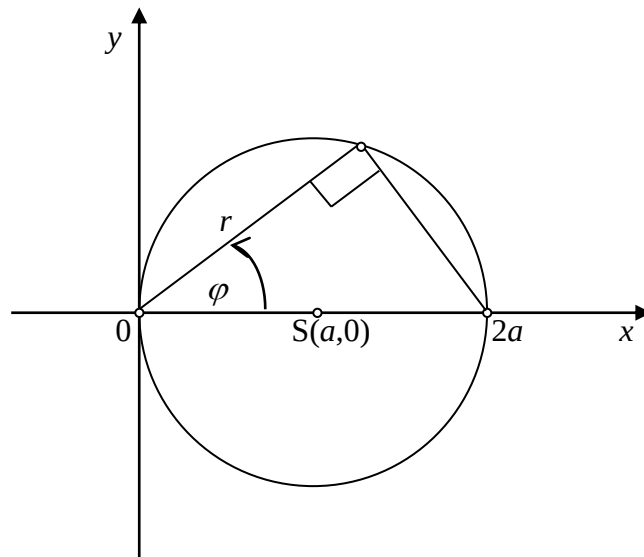
Primer:

Izračunajmo vztrajnostni moment krožne plošče glede na tangento na krog.

Rešitev:

Vzemimo, naj ima krožna plošča s polmerom  $a$  središče na obcisni osi v točki  $S(a, 0)$ , tako da je tangenta, glede na katero računamo vztrajnostni moment, kar os  $y$  (slika).

Tudi v tem primeru bomo vpeljali polarni koordinati  $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ .



Velja (1.20), to je  $J_y = \iint_D x^2 f(x,y) dx dy$ . V tem primeru imamo ploskev (lik) in tedaj je gostota mase enaka enoti  $f(x,y)=1$ , zato vztrajnostni moment lika glede na os  $y$  izračunamo po formuli

$$J_y = \iint_D x^2 dx dy = \iint_{D^*} r^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi.$$

Območje  $D^*$  je določeno takole:  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $r \in [0, 2a \cos \varphi]$ , kot je razvidno iz zgornje slike.

$$\begin{aligned} J_y &= \iint_{D^*} r^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 dr \right) \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{2a \cos \varphi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = 4a^4 \left( \frac{1}{6} \cos^5 \varphi \sin \varphi + \frac{5}{16} \varphi + \frac{5}{24} \sin 2\varphi + \frac{5}{192} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi a^4}{4} \end{aligned}$$

Opomba:

$$I = \int \cos^6 x dx = \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{16} x + \frac{5}{24} \sin 2x + \frac{5}{192} \sin 4x + C$$

◆◆◆

## 1.2 TROJNI INTEGRAL

### 1.2.1 Definicija in računanje trojnega integrala

Na podoben način, kot smo uvedli dvojni integral, lahko definiramo tudi trojni integral. Samo kot opombo povejmo, da moremo mutatis mutandis definirati tudi četverni, peterni, ..., splošno *mnogoterni* integral, vendar tega tukaj ne bomo storili, ker jih ne bomo potrebovali.

Definirajmo torej trojni integral.

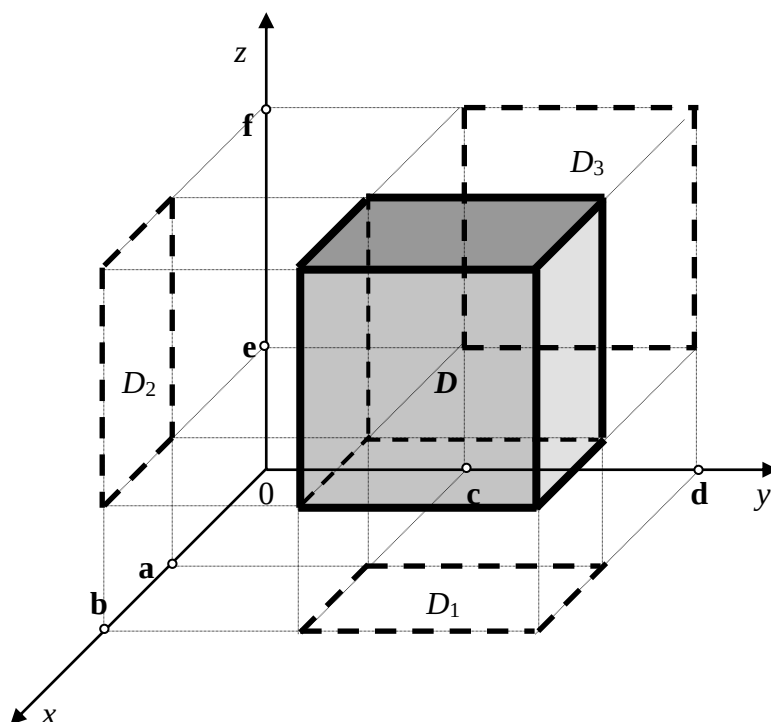
Naj bo  $f(x, y, z)$  dana in znana funkcija na nekem prostorskem območju  $D$ . To območje razrežimo na  $n$  manjših prostorskih območij s prostorninami  $\Delta V_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ . Brez škode za splošnost smemo vzeti, da smo območje  $D$  razrezali z ravninami, vzporednimi koordinatnim osem, torej so ta manjša prostorska območja kvadri.

V vsakem takšnem območju vzemimo po eno poljubno točko  $T_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ . Sedaj tvorimo produkte  $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V_k$ , ki jih seštejemo za vse  $k=1, 2, \dots, n$  in dobimo izraz  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V_k$ . Če označimo z  $\delta$  največji prostorski premer prostorskih podobmočij, je trojni integral definiran takole:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V_k \quad (1.25)$$

Pri tem smo privzeli, da je funkcija  $f(x, y, z)$  v (1.25) zvezna na območju  $D$ , samo prostorsko območje  $D$  pa je omejeno s končno mnogo gladkimi ploskvami.

Vzemimo, da je prostorsko območje  $D$  kvader, ki ima robove vzporedne s koordinatnimi osmi (slika 1.9). Ravnine  $D_1, D_2$  in  $D_3$  naj bodo projekcije kvadra na ravnine  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  in  $(y, z)$ .


 Slika 1.9: Prostorsko območje  $D$  je kvader

Funkcija  $f(x, y, z)$  naj bo integrabilna na kvadru  $D$ . Za vsak  $x \in [a, b]$  in vsak  $y \in [c, d]$  naj obstaja integral  $\int_e^f f(x, y, z) dz$ . Tedaj velja tale formula:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[ \int_e^f f(x, y, z) dz \right] dx dy \quad (1.26)$$

Integral (1.26) pa zaradi lastnosti dvojnega integrala lahko napišemo tudi v tej obliki:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[ \int_e^f f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx \quad (1.27)$$

Trojni integral lahko pišemo tudi tako

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \quad (1.28)$$

Kadar prostorsko območje  $D$  ni kvader, je postopek podoben. Tudi tu označimo projekcijo tega območja na ravnino  $(x, y)$  z  $D_1$ , ki v splošnem ni pravokotnik. Če v poljubni točki  $T(x, y)$  na območju  $D_1$  postavimo pravokotnico na ravnino  $(x, y)$ , ta pravokotnica prebode mejno ploskev prostorskega območja  $D$  v dveh točkah, najprej na višini  $z = \varphi(x, y)$ , nato pa še na višini  $z = \psi(x, y)$ . V tem primeru velja enačba

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} \left[ \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy \quad (1.29)$$

V (1.29) je potrebno najprej nato izračunati določeni integral v oglatem oklepaju, nato pa še dvojni integral, ki ga poznamo iz prejšnjega poglavja.

Formulo (1.29) torej lahko pišemo tudi enostavneje:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (1.30)$$

#### Primer:

Naj bo  $f(x, y, z) = x + y + 2z$ . Izračunajmo trojni integral te funkcije, če je prostorsko območje kvader z mejami  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 2]$  in  $z \in [0, 3]$ .

#### Rešitev:

Uporabili bomo formulo (1.27).

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dV &= \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[ \int_e^f f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^2 \left[ \int_0^3 (x + y + 2z) dz \right] dy \right\} dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^2 \left[ xz + yz + z^2 \right]_0^3 dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^2 (3x + 3y + 9) dy \right\} dx = \\ &= \int_0^1 \left( 3xy + \frac{3y^2}{2} + 9y \right) \Big|_0^2 dx = \int_0^1 (6x + 24) dx = \left( \frac{6x^2}{2} + 24x \right) \Big|_0^1 = 27 \end{aligned}$$

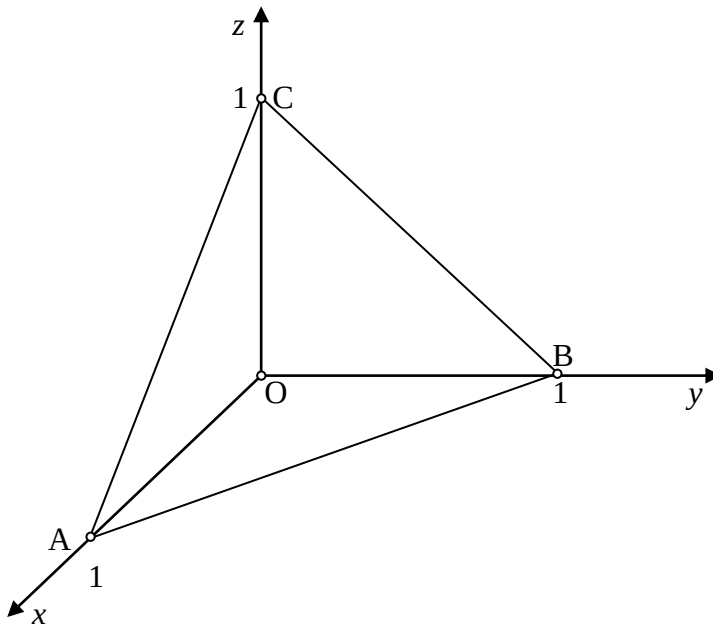
◆◆◆

Primer:

Izračunajmo trojni integral funkcije  $f(x,y,z)=x+y+z$  po prostorskem območju  $D$ , ki naj bo sedaj tristrana piramida z oglišči v točkah  $O(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$  in  $C(0,0,1)$ .

Rešitev:

Narišimo skico te piramide z danimi oglišči.



Enačba ravnine, ki gre skozi točke A, B in C, je  $x+y+z=1$ . Prostorsko območje  $D$  je piramida OABC, ki v smeri osi  $z$  zavzame vse vrednosti med  $z=0$  in  $z=1-x-y$ , v smeri osi  $y$  zavzame vse vrednosti od  $y=0$  do  $y=1-x$  (na ravnini  $(x,y)$ ) ter v smeri osi  $x$  vse vrednosti med  $x=0$  in  $x=1$ . Uporabimo (1.30) in zapišemo:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2} (1-x^2 - y^2 - 2xy) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{2}{3} - x + \frac{1}{3} x^3 \right) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

◆◆◆

Za  $f(x,y,z)=1$  je trojni integral kar prostornina  $V$  prostorskega območja  $D$ .

$$V = \iiint_D dx dy dz$$

(1.31)



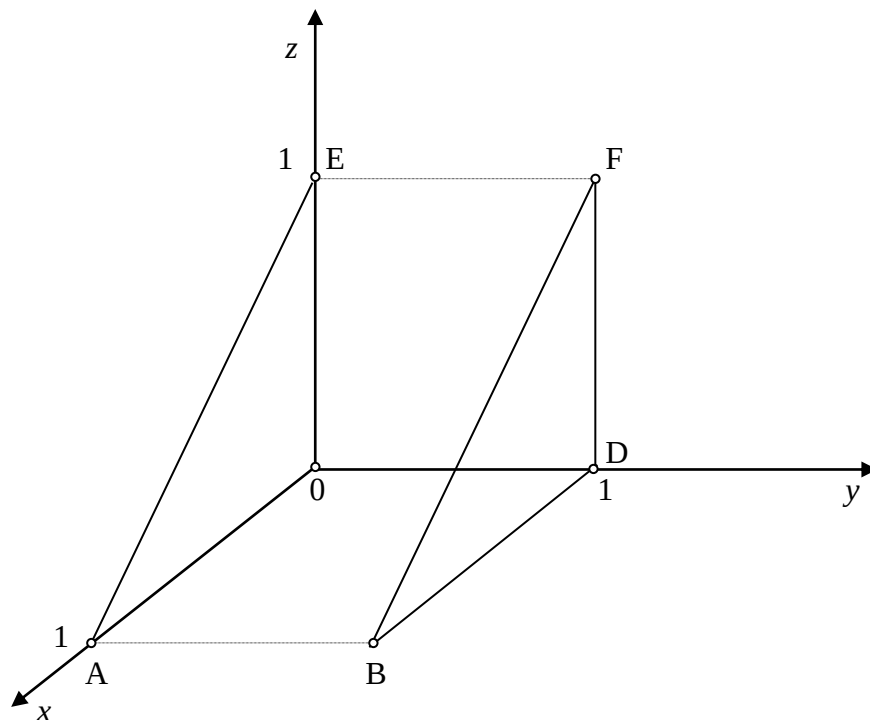
Izraz  $dV = dx dy dz$  je prostorninski element tega območja.

Primer:

Izračunajmo prostornino telesa, omejenega z ravnino  $x+z=1$  in ravnino  $(x,y)$  v mejah  $x=0, x=1$  in  $y=0, y=1$ .

Rešitev:

Telo ABDFE0 vidimo na spodnji sliki.



$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 z \Big|_0^{1-x} dy = \int_0^1 (1-x) dx \int_0^1 dy = \\
 &= \int_0^1 (1-x) y \Big|_0^1 dx = \int_0^1 (1-x) dx = \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Rezultat je seveda pričakovan, saj je telo ABDFE0 ravno polovica kocke s stranicami po eno dolžinsko enoto.

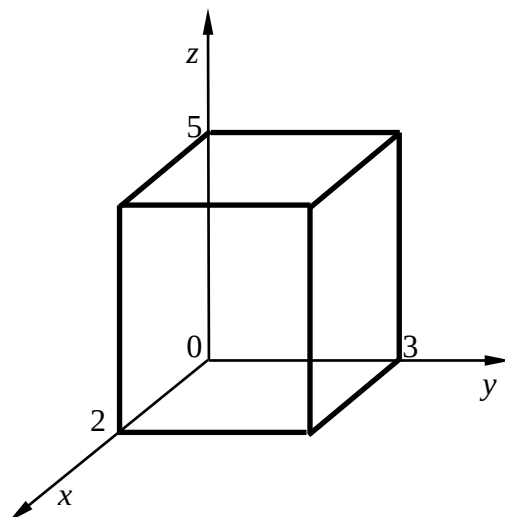
◆◆◆

Primer:

Izračunajmo prostornino kvadra s stranicami  $a=2$  cm,  $b=3$  cm,  $c=5$  cm.

Rešitev:

Brez škode za splošnost smemo vzeti, da ima kvader tri robove kar na koordinatnih oseh.



Območje  $D$  obsega del prostora za  $x \in [0, 2]$ ,  $y \in [0, 3]$ ,  $z \in [0, 5]$ .

Po formuli (1.31) je  $V = \iiint_D dx dy dz$ . Po formuli (1.27) lahko v tem primeru, ko imamo opravka s kvadrom, zapišemo:

$$V = \iiint_D dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[ \int_e^f dz \right] dy \right\} dx$$

oziroma kar

$$V = \iiint_D dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^5 dz = x \Big|_0^2 \cdot y \Big|_0^3 \cdot z \Big|_0^5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

◆◆◆

## 1.2.2 Uvedba novih spremenljivk v trojni integral

Pri uporabi trojnega integrala v mnogih praktičnih primerih pogosto pride do zahteve, ko moramo v integral vpeljati nove spremenljivke. Označimo te nove spremenljivke z znaki  $u$ ,  $v$  in  $w$ . Velja torej relacija

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \tag{1.32}$$

Podobno, kot pri dvojnem integralu, tudi tu izračunamo Jacobijevo determinanto

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

S pogoji (1.32) se integracijsko območje  $D$  preslika na integracijsko območje  $D^*$ .

Analogno formuli (1.21) pri dvojnem integralu velja pri trojnem integralu:

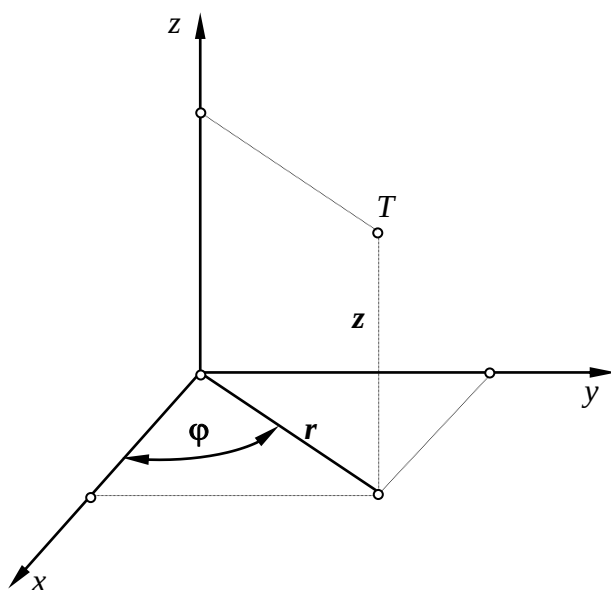
$$\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \cdot |J(u,v,w)| du dv dw \quad (1.34)$$

Pri uvedbi novih spremenljivk se velikokrat srečamo s cilindričnimi in sfernimi koordinatami. Poglejmo si oboje.

### 1.2.2.1 Cilindrične koordinate

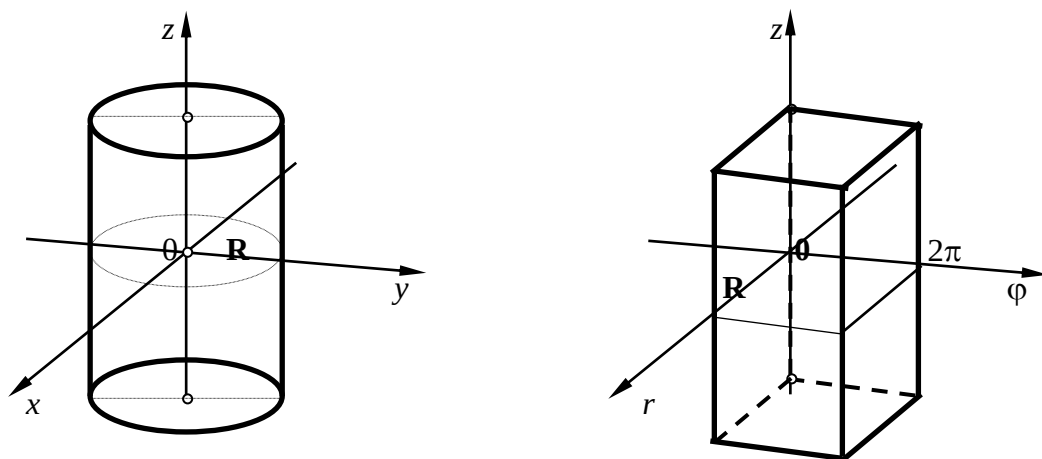
Cilindrične koordinate  $r, \varphi, z$  so dane z enačbami (slika 1.10)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.35)$$



Slika 1.10: Cilindrične koordinate  $r, \varphi, z$

Enačbe (1.35) pomenijo preslikavo valja z osjo na osi  $z$  v kvader, ki ima robove vzporedne koordinatnim osem  $r, \varphi, z$  (slika 1.11).



Slika 1.11: Cilindrične koordinate - preslikava valja v kvader

Jacobijeva determinanta za cilindrične koordinate je

$$J(r, \varphi, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Torej velja

$$J(r, \varphi, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r$$

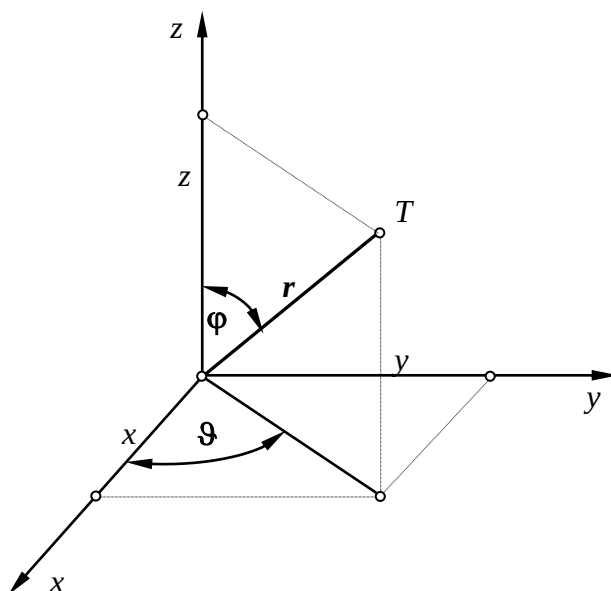
(1.36)

### 1.2.2.2 Sferne (krogline) koordinate

Sferne koordinate  $r, \varphi, \vartheta$  so dane z enačbami (slika 1.12)

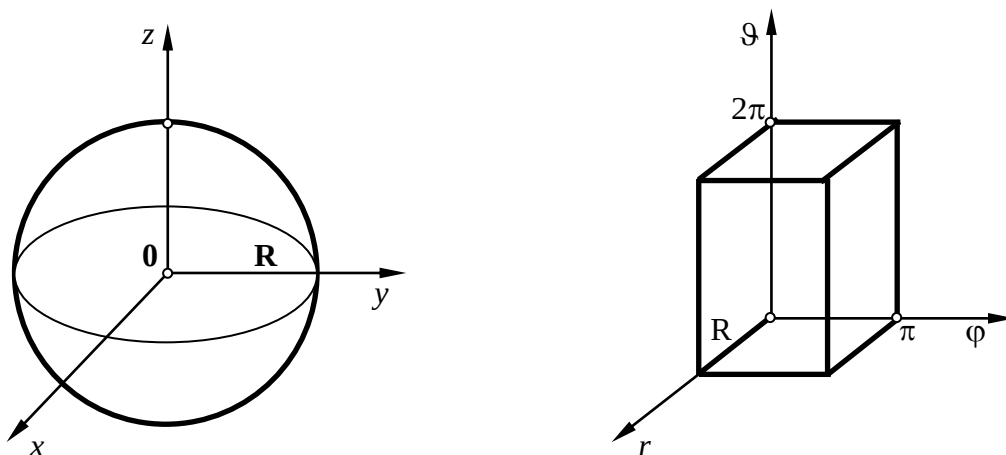
$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned}$$

(1.37)



Slika 1.12: Sferne koordinate  $r, \varphi, \vartheta$

Enačbe (1.37) pomenijo preslikavo krogle s središčem v koordinatnem izhodišču v kvader, ki ima robove vzporedne koordinatnim osem  $r, \vartheta, \varphi$  (slika 1.13).



Slika 1.13: Sferne koordinate - preslikava krogle v kvader

Jacobijeva determinanta v tem primeru je

$$J(r, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

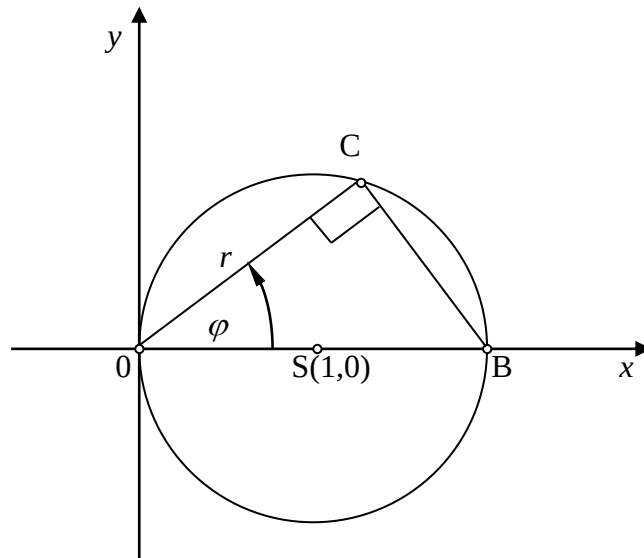
$$J(r, \varphi, \vartheta) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = r^2 \sin \varphi \quad (1.38)$$

Primer:

Izračunajmo trojni integral funkcije  $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$  na območju  $D$ , ki naj bo pokončni polovični valj med  $z=0$  in  $z=1$ , osnovna ploskev na ravnini  $(x, y)$  pa je polkrog, ki ga omejuje polkrožnica z enačbo  $y = \sqrt{2x - x^2}$ .

Rešitev:

Na ravnini  $(x, y)$  omejuje osnovno ploskev območja  $D$  krivulja z enačbo  $y = \sqrt{2x - x^2}$ , ki jo lahko preuredimo v bolj pregledno obliko:  $y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 - 2x = 0$  oziroma  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  (slika), to je kar krožnica s polmerom 1 in s središčem v točki  $S(1, 0)$ .



Uvedemo cilindrične koordinate  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$ . Jacobijeva determinanta je  $J(r, \varphi, z) = r$ . Ker je trikotnik  $0BC$  pravokotni trikotnik s hipotenuzo  $\overline{OB} = 2$ , je kotu  $\varphi$

priležna kateta  $r = 2 \cos \varphi$ , torej se  $r$  spreminja od 0 do  $2 \cos \varphi$ , pri čemer se kot  $\varphi$  spreminja od 0 do  $\frac{\pi}{2}$ , vrednost  $z$  v navpični smeri pa od 0 do 1.

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{D^*} z \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r \cdot dr d\varphi dz = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^1 z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2\cos\varphi} = \\ &= \frac{8}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{8}{6} \left( \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo prostornino telesa, omejenega s ploskvama  $(x-1)^2 + y^2 = z$  in  $2x + z - 2 = 0$ .

Rešitev:

Ugotoviti moramo področje integriranja na ravnini  $(x, y)$ , to je projekcijo področja  $D$  na to ravnino. Zaradi  $z=(x-1)^2+y^2$  in  $z=2-2x$  dobimo enačbo  $(x-1)^2+y^2=2-2x$ , ki jo preuredimo in zapišemo v obliki  $x^2+y^2=1$ . Področje integriranja na ravnini  $(x, y)$  je torej krog s polmerom 1 in središčem v koordinatnem izhodišču.

Spet uporabimo cilindrične koordinate:  $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$ .

Jacobijeva determinanta je  $J(\varphi, r, z)=r$ .

Prostornina telesa je

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{1+r^2-2r\cos\varphi}^{2-2r\cos\varphi} dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \cdot z \Big|_{1+r^2-2r\cos\varphi}^{2-2r\cos\varphi} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r-r^3) dr = \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo trojni integral

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz.$$

V ta namen uvedemo sferne koordinate s predpisom  $x=r\sin\varphi\cos\vartheta$ ,  $y=r\sin\varphi\sin\vartheta$  in  $z=r\cos\varphi$ . Jacobijeva determinanta je  $J(r, \varphi, \vartheta)=r^2\sin\varphi$ . Meje polkrogle za sferne koordinate

so:  $r \in [0, a]$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  in  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Izraz v integrandu  $(x^2+y^2)$  zapišemo z novimi koordinatami

$$x^2+y^2=(r\sin\varphi\cos\vartheta)^2+(r\sin\varphi\sin\vartheta)^2=r^2\sin^2\varphi$$

Od tod

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz = \iiint_{D^*} r^2 \sin^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^a \sin^3\varphi d\varphi = \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{a^5}{5} \cdot \mathcal{A}_0^{2\pi} \cdot \left( \cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{a^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi a^5}{15} \end{aligned}$$

◆◆◆



Primer:

Izračunajmo volumen telesa, ki ga oklepa ploskev z enačbo:  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ ,  $a > 0$ .

Rešitev:

Ta ploskev je glede na os  $z$  osnosimetrična in sklenjena. Zaradi zahteve  $a > 0$  je  $z \geq 0$ .

V integral  $V = \iiint_{(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z} dx dy dz$  bomo vpeljali polarne koordinate (1.37).

Ploskev  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$  je v polarnih koordinatah zapisana takole:

$$(r \sin \varphi \cos \vartheta)^2 + (r \sin \varphi \sin \vartheta)^2 + (r \cos \varphi)^2 = a^3 r \cos \varphi$$

Ta izraz uredimo in dobimo  $r^4 = a^3 r \cos \varphi$  in od tod  $r = a\sqrt[3]{\cos \varphi}$ .

Meje prostorskega območja so zaradi zgornje relacije in pogoja  $z \geq 0$  naslednje:

$$r \in [0, a\sqrt[3]{\cos \varphi}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Upoštevamo še Jakobijevo determinanto  $J(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \sin \varphi$  in dobimo:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos \varphi}} r^2 \sin \varphi dr = \vartheta \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{r^3}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^{a\sqrt[3]{\cos \varphi}} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

◆◆◆

# **II**

## **KRIVULJNI IN PLOSKOVNI INTEGRALI**

## 2.1 KRIVULJNI INTEGRAL

### 2.1.1 Krivulje v prostoru

Postavimo v prostor pravokotni koordinatni sistem  $(x, y, z)$ . Znani naj bosta dve funkciji  $y = f(x)$  in  $z = g(x)$ , ki naj bosta enolični in zvezni za vse  $x$  iz danega intervala  $[a, b]$ . Za vsak  $x \in [a, b]$  tedaj lahko izračunamo vrednosti za  $y = f(x)$  in  $z = g(x)$ . Vsaka trojica števil  $(x, f(x), g(x))$  pa določa neko točko v prostoru. Ko se  $x$  zvezno spreminja od  $a$  do  $b$ , se tudi točka zvezno premika v prostoru in na ta način opiše neko krivuljo  $C$ . Krivulja v prostoru je z enačbama  $y = f(x)$  in  $z = g(x)$  natančno določena. Prostorsko krivuljo  $C$  tedaj določata enačbi

$$y = f(x), z = g(x) \quad (2.01)$$

Krivulja v prostoru je lahko podana tudi *parametrično*. Na intervalu  $[\alpha, \beta]$  izberimo spremenljivko  $t$ , funkcije  $x(t), y(t)$  in  $z(t)$  pa naj bodo enolične in zvezne funkcije te spremenljivke. Spremenljivko  $t$  v takšnih primerih (običajno) imenujemo *parameter*. Za vsak  $t \in [\alpha, \beta]$  dobimo trojico števil  $(x(t), y(t), z(t))$ , ki so koordinate točke v prostoru. Ko parameter  $t$  opiše vse vrednosti z intervala  $[\alpha, \beta]$ , opišejo točke neko krivuljo v prostoru. Sistem

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (2.02)$$

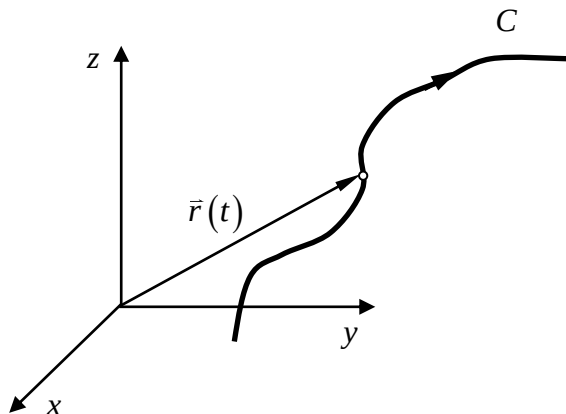
opisuje krivuljo v prostoru. Sistemu (2.02) pravimo *parametrična enačba krivulje  $C$  v prostoru*.

Enačbo krivulje v prostoru pa lahko zapišemo še v **vektorski obliki**. Od izhodišča prostorskega koordinatnega sistema do točke  $T$  na krivulji v prostoru naj vodi krajevni vektor  $\vec{r}$ . Ker so koordinate točke ravno trojica  $(x(t), y(t), z(t))$ , so to hkrati tudi komponente krajevnega vektorja

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (2.03)$$

Ko gre v (2.03) parameter  $t$  od  $\alpha$  do  $\beta$ , opiše krajevni vektor ravno krivuljo  $C$  (slika 2.1). Parametrična enačba krivulje (2.02) ali (2.03) je pripravna tudi zato, ker z njo določimo

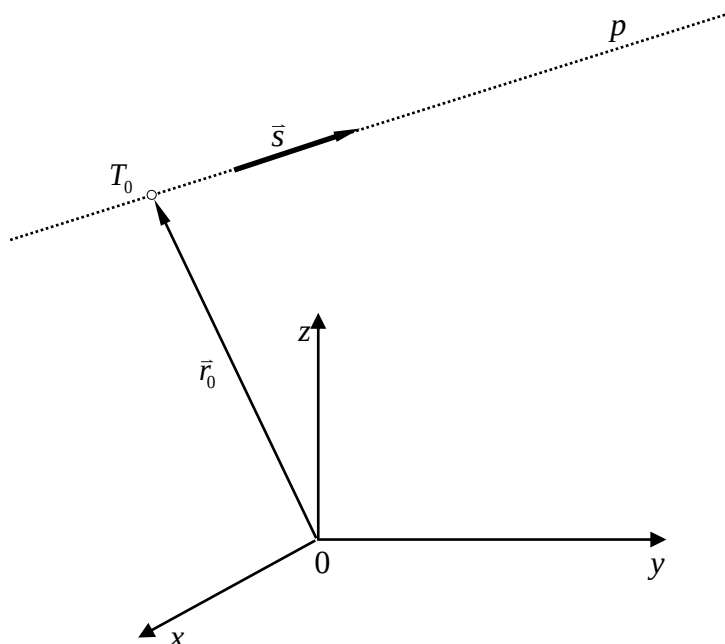
tudi **orientacijo krivulje**. Pravimo, da je krivulja  $C$  **orientirana pozitivno**, ko parameter  $t$  narašča, v nasprotnem primeru pa je krivulja **orientirana negativno**. Krivuljo smo s tem orientirali, kar se bo kasneje izkazalo kot zelo koristno in uporabno.



Slika 2.1: Parametrična enačba krivulje v vektorski obliki

Primer:

Enačba premice  $p$  skozi dano točko  $T_0$ , do katere vodi krajevni vektor  $\vec{r}_0$  in s smernim vektorjem  $\vec{s}$  (glej: Matematične metode II, stran 114) je  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$ .



Slika 2.2: Premica v prostoru

Enačba  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$  je *vektorska enačba premice*. Vsakemu realnemu številu  $t$  ustreza natanko določena točka  $\vec{r}$  na premici in vsaki točki  $\vec{r}$  na premici ustreza natanko določeno realno število  $t$ .

Če so vektorji dani analitično:  $\vec{s} = (m, n, p)$ ,  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  in  $\vec{r} = (x, y, z)$ , potem iz  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$  dobimo *parametrične enačbe premice*:  $x = x_0 + mt$ ,  $y = y_0 + nt$ ,  $z = z_0 + pt$ .

◆◆◆

#### Primer:

Če v enačbi elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (ali tudi  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ) postavimo  $x = a \cos t$  in  $y = b \sin t$ , dobimo identiteto:  $1 = 1$ .

Zato je vektorska funkcija  $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0) = a \cos t \cdot \vec{i} + b \sin t \cdot \vec{j}$  ravno enačba elipse na ravnini  $(x, y)$ .

Ko je  $b = a$ , pa dobimo enačbo krožnice v ravnini  $(x, y)$ :  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ .

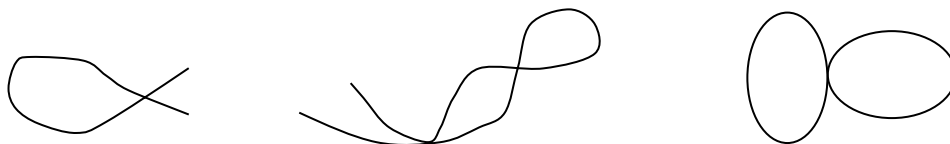
◆◆◆

Kadar ležijo vse točke krivulje  $C$  na neki ravnini, kot je to v zgornjem primeru, potem je to **ravninska krivulja** (angl.: *plane curve*). Kadar pa take ravnine ni, je  $C$  prava **prostorska krivulja** (angl.: *twisted curve*).

Krivulja, ki sama sebe nikoli ne seka (ali se dotika), je **enostavna krivulja**.

#### Primer:

Krivulje na spodnji sliki niso enostavne.



◆◆◆

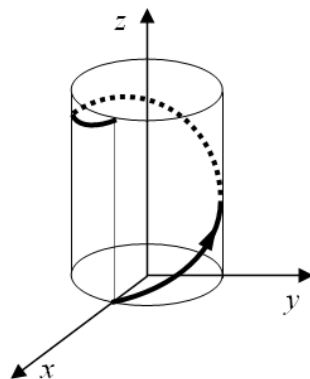
#### Primer:

Prostorska krivulja, dana z enačbo  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) = a \cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j} + bt\vec{k}$  je **vijačnica** (krožna spirala). Dobimo jo tako, da pravokotni trikotnik ovijemo na pokončni valj, kjer se ena kateta ovije okoli oboda osnovne ploskve, pri tem pa se hipotenuza navije po plašču valja in opiše krivuljo – vijačnico.

Pri tem je  $a$  polmer valja, kateti pravokotnega trikotnika pa sta v razmerju  $a : b$ .

Ko je  $b > 0$ , ima vijačnica smer desnega vijaka, ko pa je  $b < 0$ , ima smer levega vijaka.

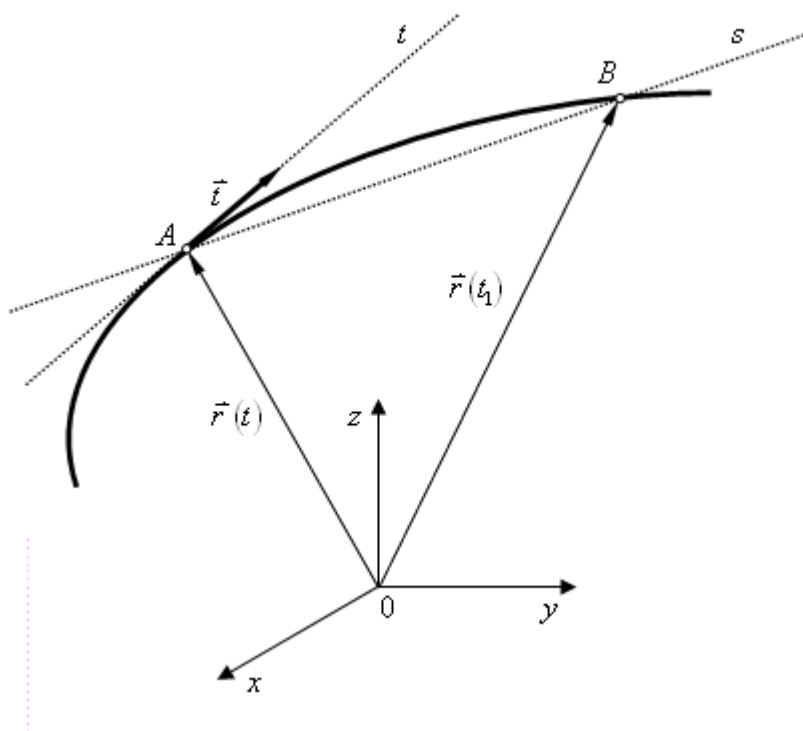
Na spodnji sliki je prikazana vijačnica za desni vijak.



Vijačnica je enostavna krivulja.

◆◆◆

Pri proučevanju prostorskih krivulj ima pomembno vlogo **tangenta na krivuljo**. Tangenta je premica, ki ima s krivuljo natanko eno skupno točko. Do tangente pridemo z limitnim procesom. Naj bosta na enostavni krivulji  $C$  dani dve različni točki  $A$  in  $B$ . Skozi ti dve točki lahko potegnemo natanko eno premico, ki jo imenujemo *sekanta krivulje  $C$* . Do točke  $A$  naj vodi krajevni vektor  $\vec{r}(t)$ , do točke  $B$  pa  $\vec{r}(t_1)$ . Razlika  $\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)$  je vektor, ki ima začetek v točki  $A$  in konec v točki  $B$ . Na sekanti leži tudi vektor  $\frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t}$ . Sedaj sprožimo limitni proces, ko gre točka  $B$  proti točki  $A$ , torej  $t_1$  proti  $t$ , s tem pa limitira sekanta proti tangenti na krivuljo v točki  $A$  (slika 2.3).



Slika 2.3: Tangenta na krivuljo

V limitnem procesu preide vektor  $\frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t}$  v odvod (opomba: odvod po parametru označimo s piko), to je

$$\dot{\vec{r}}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t} \quad (2.04)$$

Vektor (2.04) ima smer tangente na krivuljo  $C$  v točki  $A$ , zato ga imenujemo **tangentni vektor** na krivuljo  $C$ . Pri tem privzemimo, da  $\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}$  za konkretno vrednost parametra  $t$ .

Pripadajoči **enotni tangentni vektor**, označimo ga s  $\vec{t}$ , je

$$\vec{t} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (2.05)$$

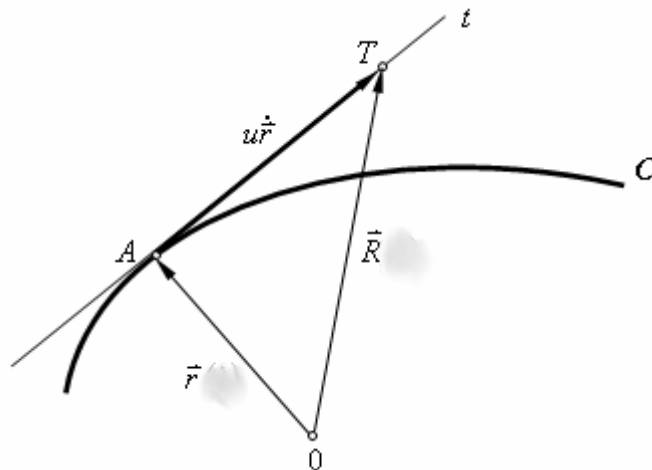
To je **smerni vektor** na tangenti, njegove komponente so smerni kosinusi.

Oba vektorja,  $\dot{\vec{r}}(t)$  in  $\vec{t}(t)$  ležita na tangenti in imata isto smer, to je smer naraščajočega parametra  $t$ . Če spremenimo orientacijo krivulje  $C$ , se spremeni tudi smer obeh vektorjev,  $\dot{\vec{r}}(t)$  in  $\vec{t}$ .

Enačbo tangente na krivuljo  $C$  v točki  $A$  dobimo brez težav. Naj bo  $\vec{R}$  krajevni vektor iz izhodišča koordinatnega sistema do poljubne točke  $T$  na tangenti. Vektor od točke  $A$  do točke  $T$  na tangenti je  $u\vec{r}$  (slika 2.4), zato je enačba tangente kar izraz

$$\vec{R} = \vec{r} + u\dot{\vec{r}} \quad (2.06)$$

V enačbi (2.06) je  $u$  parameter enačbe premice. Ko preteče  $u$  vse realne vrednosti od  $-\infty$  do  $+\infty$ , opiše krajišče vektorja  $\vec{R}$  natanko enkrat vse točke tangente  $t$ .



Slika 2.4: Enačba tangente

Naj bodo  $X, Y$ , in  $Z$  koordinate točke  $T$ ;  $x, y$ , ter  $z$  pa naj bodo koordinate točke  $A$ . To so hkrati tudi komponente vektorjev  $\vec{R}$  in  $\vec{r}$ , torej  $\vec{R} = (X, Y, Z)$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Enačbo (2.06) potem lahko zapišemo s komponentami takole

$$\begin{aligned} X &= x + u\dot{x} \\ Y &= y + u\dot{y} \\ Z &= z + u\dot{z} \end{aligned} \quad (2.07)$$

Sistem (2.07) so parametrične enačbe tangente na krivuljo  $C$ .

Primer:

Vzemimo elipso  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  in izračunajmo enačbo tangente na elipso v točki  $A(1, y_0 > 0)$ .

Rešitev:

Parametrično enačbo elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dobimo, ko vzamemo  $x = a \cos t$  in  $y = b \sin t$ . V tem primeru je  $a = 2$  in  $b = 1$ , zato je  $x = 2 \cos t$  in  $y = \sin t$ . Ker je abscisa točke  $A$  enaka 1, je  $2 \cos t = 1$ , od tod pa vidimo, da je kot  $t = \frac{\pi}{3}$ . Ordinata točke  $A$  je  $y = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Opomba: Seveda bi dobili ordinate  $y$  tudi neposredno iz enačbe  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Če vanjo vstavimo  $x = 1$ , je od tod  $y^2 = \frac{3}{4}$  oziroma  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  pri pogoju  $A(1, y_0 > 0)$ .



Iščemo torej enačbo tangente na dano elipso v točki  $A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

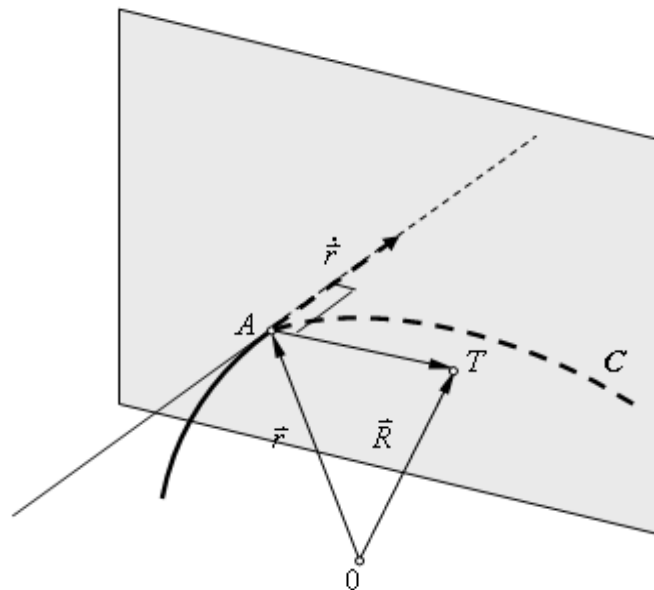
Zaradi enačbe elipse  $\vec{r}(t) = (2\cos t, \sin t, 0)$ , je odvod  $\dot{\vec{r}}(t) = (-2\sin t, \cos t, 0)$ . V dani točki  $A$  je odvod  $\dot{\vec{r}} = \left(-2\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}, 0\right) = \left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$  in enačba tangente na elipso v dani točki  $A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  je potem po formuli (6):

$$\vec{R} = \vec{r} + u\dot{\vec{r}} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) + u \cdot \left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(1 - \sqrt{3}u, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u, 0\right).$$

◆◆◆

Ravnina, ki gre skozi dotikališče  $A$  tangente na krivuljo  $C$ , in je na tangento pravokotna, se imenuje **normalna ravnina**.

Tudi enačbo normalne ravnine bomo dobili brez težav (slika 2.5).



Slika 2.5: Normalna ravnina

Naj bo  $T$  poljubna točka na normalni ravnini, do nje naj vodi krajevni vektor  $\vec{R}$ . V točki  $A$ , do katere vodi krajevni vektor  $\vec{r}$ , je podana tangenta na krivuljo  $C$ . V točki  $A$  postavimo normalno ravnino, tako da je pravokotna na to tangento. Vemo, da ima vektor  $\dot{\vec{r}}$  smer tangente, zato je ta vektor pravokoten na normalno ravnino. Vektor, ki povezuje točki  $A$  in  $T$ , je  $\vec{R} - \vec{r}$  in leži na normalni ravnini, zato je pravokoten na vektor  $\dot{\vec{r}}$ . Pravokotna vektorja pa imata skalarni produkt enak nič, zato je **enačba normalne ravnine** kar zapis

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

(2.08)

Če so vektorji dani s komponentami takole:  $\vec{R} = (X, Y, Z)$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$  in  $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , je enačba normalne ravnine

$$(X - x)\dot{x} + (Y - y)\dot{y} + (Z - z)\dot{z} = 0 \quad (2.09)$$

Primer:

Vzemimo elipso  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  iz prejšnjega primera, za katero poznamo enačbo tangente v točki  $A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Izračunajmo še enačbo normalne ravnine v tej točki.

Rešitev:

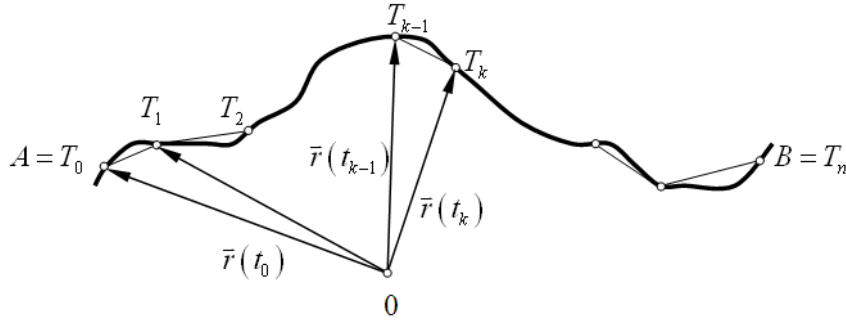
Elipsa  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  ima v parametrični obliki enačbo  $\vec{r}(t) = (2\cos t, \sin t, 0)$ . Odvod te vektorske funkcije je  $\dot{\vec{r}}(t) = (-2\sin t, \cos t, 0)$ . V dani točki  $A$  je  $\vec{r}(t) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  in odvod  $\dot{\vec{r}} = \left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$ . Po formuli (2.08):  $(\vec{R} - \vec{r})\dot{\vec{r}} = 0$ , je enačba normalne ravnine v dani točki

$$\begin{aligned} \left(X - 1, Y - \frac{\sqrt{3}}{2}, Z\right) \cdot \left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0\right) &= 0 \\ -(X - 1)\sqrt{3} + \left(Y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} &= 0 \\ -\sqrt{3}X + \frac{1}{2}Y + \frac{3\sqrt{3}}{4} &= 0 \end{aligned}$$

◆◆◆

Izračunajmo še **ločno dolžino krivulje v prostoru**. Vzemimo krivuljo  $C$ , podano z enačbo  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , pri čemer zahtevajmo, da naj bo funkcija  $\vec{r}(t)$  zvezno odvedljiva funkcija parametra  $t \in [\alpha, \beta]$ . Pri vrednosti parametra  $t = \alpha$  naj določa enačba  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  na krivulji točko  $A$ , za vrednost  $t = \beta$  pa točko  $B$ . Ko gre  $t$  od  $\alpha$  do  $\beta$ , opiše funkcija  $\vec{r}(t)$  celotno krivuljo  $\overline{AB}$ . Zanima nas dolžina teg te krivulje. Dolžino bomo označili s črko  $s$ .

Interval  $[\alpha, \beta]$  razdelimo na  $n$  podintervalov  $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta$ . Vsaki vrednosti parametra  $t = t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  pripada na krivulji ena točka  $T_k$ , skupno ta delitev določa  $n+1$  točk, kjer je začetna točka  $A = T_0$  in končna točka  $B = T_n$ . Zvežimo po dve sosedni točki z daljicami, tako da dobimo lomljeno črto, ki se krivulji  $C$  prilega tem bolje, čim več delitvenih točk smo uporabili (slika 2.6).



Slika 2.6: Lomljena črta

Dolžina ene daljice  $\overline{T_{k-1}T_k}$  je po Pitagorovem izreku

$$\overline{T_{k-1}T_k} = |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2}$$

Označimo širino k-tega podintervala  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ . Označimo še  $\tau_k^x, \tau_k^y, \tau_k^z$  točke znotraj tega podintervala. Uporabimo Lagrangeov izrek (Matematične metode I, stran 208) in lahko zapišemo

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\tau_k^x) \Delta t_k, \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = \dot{y}(\tau_k^y) \Delta t_k \quad \text{in} \quad z(t_k) - z(t_{k-1}) = \dot{z}(\tau_k^z) \Delta t_k$$

in od tod

$$\overline{T_{k-1}T_k} = \sqrt{(\dot{x}(\tau_k^x) \Delta t_k)^2 + (\dot{y}(\tau_k^y) \Delta t_k)^2 + (\dot{z}(\tau_k^z) \Delta t_k)^2}$$

Skupna dolžina lomljene črte je vsota dolžin vseh posameznih daljic, to je

$$s_n = \sum_{k=1}^n \overline{T_{k-1}T_k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\dot{x}(\tau_k^x))^2 + (\dot{y}(\tau_k^y))^2 + (\dot{z}(\tau_k^z))^2} \cdot \Delta t_k$$

Lomljena črta se krivulji tem bolj prilega, čim več je delitvenih točk. Če jih je neskončno, je lomljena črta kar identična s krivuljo. Zato je dolžina krivulje

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \sqrt{(\dot{x}(\tau_k^x))^2 + (\dot{y}(\tau_k^y))^2 + (\dot{z}(\tau_k^z))^2} \cdot \Delta t_k \right]$$

Ta limita pa je enaka določenemu integralu, ko se parameter  $t$  spreminja od  $\alpha$  do  $\beta$ .

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (2.10)$$

Pod kvadratnim korenem v integrandu nastopajo odvodi komponent vektorja  $\vec{r}(t)$ . Torej je  $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$  in vsota kvadratov komponent je skalarni produkt vektorja  $\dot{\vec{r}}$  samega s seboj:  $\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ . Formulo (2.10) zato pišemo običajno krajše takole

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}} dt \quad (2.11)$$

Kadar je krivulja dana z enačbama (2.01), to je  $y = f(x), z = g(x)$ , jo zapišemo v parametrični obliki tako, da postavimo  $x = t \Rightarrow y = f(t), z = g(t)$ . Odvodi po parametru so potem:  $\dot{x} = 1, \dot{y} = f'(x) = y'$  in  $\dot{z} = g'(x) = z'$ . Dolžino krivulje potem dobimo iz (2.10) v obliki

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad (2.12)$$

Dolžina krivulje je neko pozitivno število. Če pa v integralu (2.11) fiksno zgornjo mejo nadomestimo s spremenljivim parametrom  $t$ , postane integral funkcija spremenljivke  $t$ .

$$s(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}} d\tau \quad (2.13)$$

Integral (2.13) je odvedljiva funkcija. Odvajajmo (2.13) po parametru  $t$  in dobljeni odvod kvadrirajmo. Dobimo izraz

$$\dot{s}^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

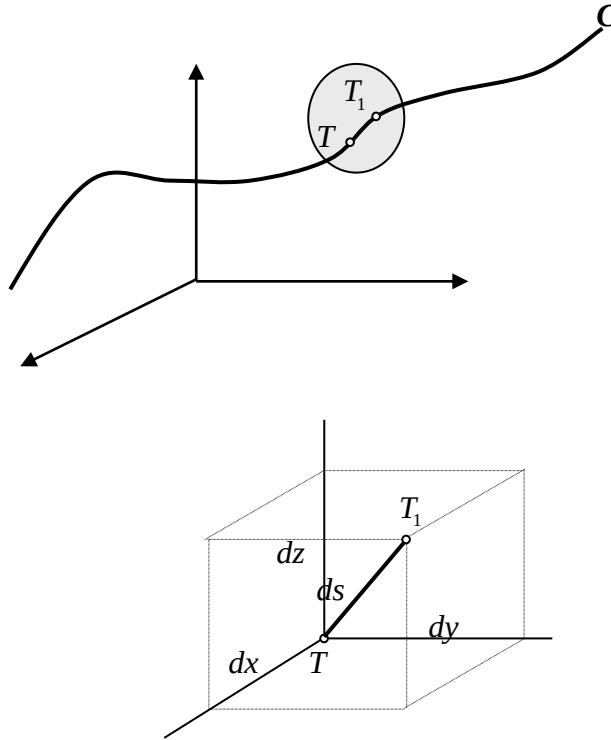
Zapišimo to z diferenciali

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Od tod pa dobimo formulo za kvadrat **ločnega diferenciala**

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.14)$$

Ločni diferencial  $ds$  je lok med dvema bližnjima točkama  $T(x, y, z)$  in  $T_1(x + dx, y + dy, z + dz)$  na krivulji  $C$ . Ker sta točki  $T$  in  $T_1$  zelo blizu skupaj, moremo lok med njima nadomestiti kar z daljico, ki povezuje ti dve točki (slika 2.7).



Slika 2.7: Ločni diferencial  $ds$

Primer:

Izračunajmo dolžino vijačnice  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  od  $T_0 = (a, 0, 0)$  do  $T_1 = (a, 0, 2\pi b)$ .

Rešitev:

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} &= (-a \sin t, a \cos t, b) \cdot (-a \sin t, a \cos t, b) = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = \\ &= a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Računamo dolžino loka vijačnice od točke  $T_0 = (a, 0, 0)$  do točke  $T_1 = (a, 0, 2\pi b)$ . Vse točke krivulje, pa seveda tudi ti dve točki, ležita na krivulji z enačbo  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ . Določiti moramo parameter  $t$ , ki ustreza tem točkam.

Začetna točka:  $T_0 = (a, 0, 0) \Rightarrow a \cos t = 0, a \sin t = 0, bt = 0$ . Sistem teh treh enačb ima rešitev  $t = 0$ .

Končna točka:  $T_1 = (a, 0, 2\pi b) \Rightarrow a \cos t = a, a \sin t = 0, bt = 2\pi b$ . Sistem teh treh enačb ima rešitev  $t = 2\pi$ .

Računamo torej ločno dolžino dane vijačnice za  $t \in [0, 2\pi]$ . Iz formule (2.11) dobimo

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

◆◆◆

Funkcija (2.13) je strogo naraščajoča funkcija parametra  $t$ , zato se da obrniti in dobiti parameter  $t = t(s)$  kot enolično in zvezno odvedljivo funkcijo loka  $s$ . Tedaj lahko pišemo enačbo krivulje (2.03) v obliki

$$\vec{r} = \vec{r}(t(s)) = [x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))] \quad (2.15)$$

Krajevni vektor  $\vec{r}$  smo zapisali kot funkcijo **naravnega parametra**  $s$ . Vrednosti naravnega parametra  $s$  na krivulji  $C$  pripada takšna točka  $T$ , katere ločna razdalja od začetne točke  $T_0$  je enaka  $s$ .

Če za parameter  $t$  vzamemo kar naravni parameter  $t = s$  in odvode po  $s$  označimo s črtico, dobimo iz

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

takšno enačbo

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

Ker je  $\frac{ds}{ds} = 1$ , od tod sledi

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \quad (2.16)$$

Odvodi  $x' = \frac{dx}{ds}$ ,  $y' = \frac{dy}{ds}$  in  $z' = \frac{dz}{ds}$  so komponente krajevnega vektorja  $\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds}$ , zato je leva stran v enačbi (2.16) skalarni produkt tega vektorja samega s seboj.

$$\vec{r}' \cdot \vec{r}' = (x', y', z')(x', y', z') = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Od tod in iz (2.16) pa velja

$$\boxed{\vec{r}' \cdot \vec{r}' = 1} \quad (2.17)$$

Odvod  $\vec{r}'$  je torej enotski vektor.

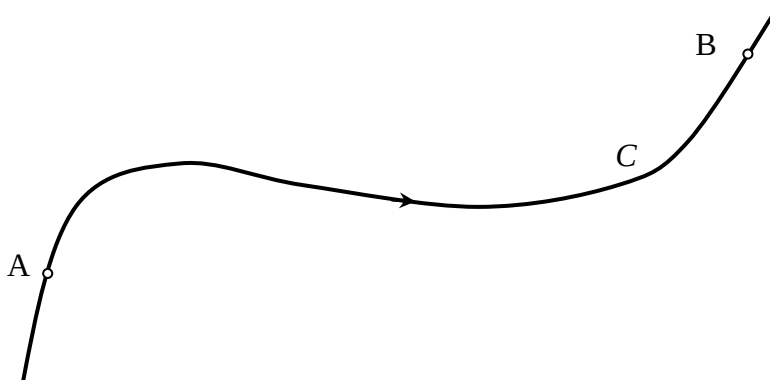
## 2.1.2 Krivuljni integral, definicija in računanje

Krivuljni integral je – najenostavneje rečeno – le posplošitev določenega integrala, ki ga poznamo v običajni obliki

$$\boxed{I = \int_a^b f(x) dx} \quad (2.18)$$

V (2.18) integriramo dano funkcijo  $f(x)$  v mejah od  $a$  do  $b$  po abscisi  $x$ , torej po premici (ali vzdolž premice), ki določa abscisno os.

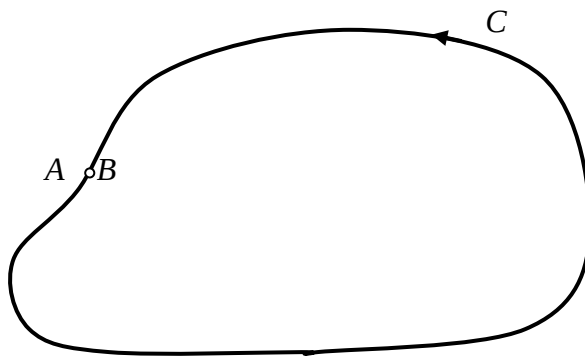
V krivuljnem integralu pa bomo integrirali dano funkcijo  $f(x)$  po neki znani krivulji  $C$  v ravnini ali v prostoru, prav tako v mejah od neke točke  $A$  do točke  $B$ . Obe točki seveda ležita na tej krivulji (slika 2.8). S puščico smo označili smer integriranja (od točke  $A$  do točke  $B$ ).



Slika 2.8: Krivulja  $C$  v prostoru (ravnini)

Krivulji  $C$  bomo rekli **pot integriranja**, na kateri je  $A$  **začetna** in  $B$  **končna točka**. Pravimo, da smo s tem krivuljo  $C$  **orientirali**. To smer/orientacijo smo grafično označili s puščico na krivulji.

Točki  $A$  in  $B$  se lahko tudi ujemata – v tem primeru pravimo, da je pot integriranja **sklenjena** (slika 2.9).



Slika 2.9: Sklenjena pot  $C$  v prostoru (ravnini)

Naj bo krivulja podana v parametrični obliki

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad , \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (2.19)$$

Kadar parameter  $t$  narašča, je smer (pot) od točke  $A$  do točke  $B$  **pozitivna**, v nasprotnem primeru pa je **negativna**.

Krivulja  $C$  je **gladka**, ko moremo v vsaki točki te krivulje postaviti natanko eno tangento. Bolj natančno: krivulja z enačbo (2.19) je gladka, če je v vsaki točki zvezno odvedljiva, njen odvod  $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$  pa je od nič različen vektor v vsaki točki krivulje  $C$ .

Ta zahteva je precej stroga, zato bomo v nadaljevanju privzeli, da naj bo krivulja  $C$  vedno vsaj **odsekoma gladka**.

**Definicija:** Krivuljni integral funkcije  $\vec{F}(\vec{r}(t))$  vzdolž krivulje  $C$  je določen z izrazom

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}}(t) dt \quad (2.20)$$

Zaradi (2.19) je  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ . Ker odvajamo po parametru  $t$ , je tole res:  $dx = \dot{x}dt$ ,  $dy = \dot{y}dt$ ,  $dz = \dot{z}dt$ . Če je še  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , lahko krivuljni integral (2.20) zapišemo tudi v obliki



$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_a^b (F_1 \dot{x} + F_2 \dot{y} + F_3 \dot{z}) dt \quad (2.21)$$

Kadar je krivuljni integral dan vzdolž sklenjene krivulje, ga označimo takole:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.22)$$

Iz definicije krivuljnega integrala vidimo, da je integrand skalar in ne vektor.

Definicija:

Krivuljni integral vektorske funkcije (vektorskega polja) vzdolž sklenjene krivulje  $C$  imenujemo cirkulacija polja  $\vec{F}$ .

Primer:

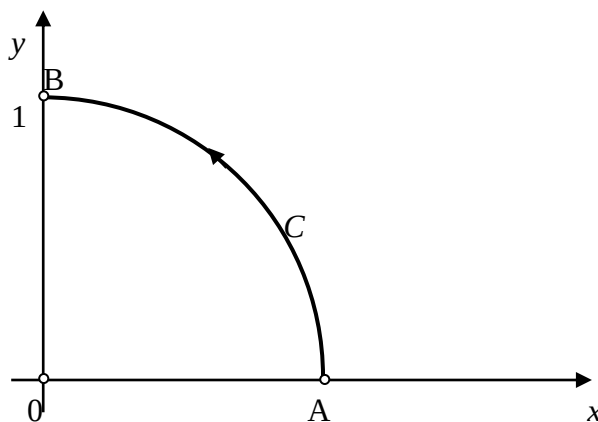
Krivuljni integral si lahko v mehaniki predstavljamo kot delo, ki ga opravi sila  $\vec{F}$  na poti  $C$ .

◆◆◆

Iz (2.21) vidimo, da je krivuljni integral kar določeni integral funkcije spremenljivke  $t$  nad intervalom  $[a, b]$  na  $t$  osi v pozitivni smeri, to je v smeri naraščajočega  $t$ .

Primer:

Vzemimo funkcijo na ravnini  $\vec{F}(\vec{r}) = (-y, -xy, 0)$ , krivulja  $C$  pa naj bo četrtina krožnice s polmerom 1 v smeri od točke A do točke B, kot kaže slika 2.10. Izračunajmo krivuljni integral te funkcije vzdolž dane poti.



Slika 2.10: Krivulja  $C$  je četrtina krožnice s polmerom 1

Rešitev:

Zaradi  $\overline{OA}=\overline{OB}=1$  je na ravnini  $(x, y)$  enačba krivulje  $C$  v parametrični obliki

$$\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Njen diferencial je

$$d\vec{r}(t)=\dot{\vec{r}}(t)dt=(-\sin t, \cos t)dt$$

Zaradi  $x(t)=\cos t$  in  $y(t)=\sin t$  je funkcija

$$\vec{F}(\vec{r})=(-y, -xy, 0)=(-\sin t, -\cos t \sin t, 0)$$

Skalarni produkt v integrandu je

$$\vec{F}(\vec{r})d\vec{r}=(-\sin t, -\cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)dt=(\sin^2 t - \cos^2 t \sin t)dt$$

in iskani krivuljni integral je po formuli (2.03)

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(t))\dot{\vec{r}}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t, -\cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \cos^2 t \sin t)dt = \left[ \frac{1}{2} \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) - \left( -\frac{\cos^3 t}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi - 4}{12} \approx 0,45 \end{aligned}$$

◆◆◆

Primer:

Krivulja  $C$  v prostoru naj bo sedaj en zavoje vijčnice z enačbo  $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, 3t)$ . En zavoje pomeni, da parameter  $t$  opiše polni kot,  $t \in [0, 2\pi]$ . Funkcija, ki jo integriramo vzdolž te krivulje, pa naj se glasi  $\vec{F}(\vec{r})=(z, x, y)$ . Izračunajmo pripadajoči krivuljni integral.

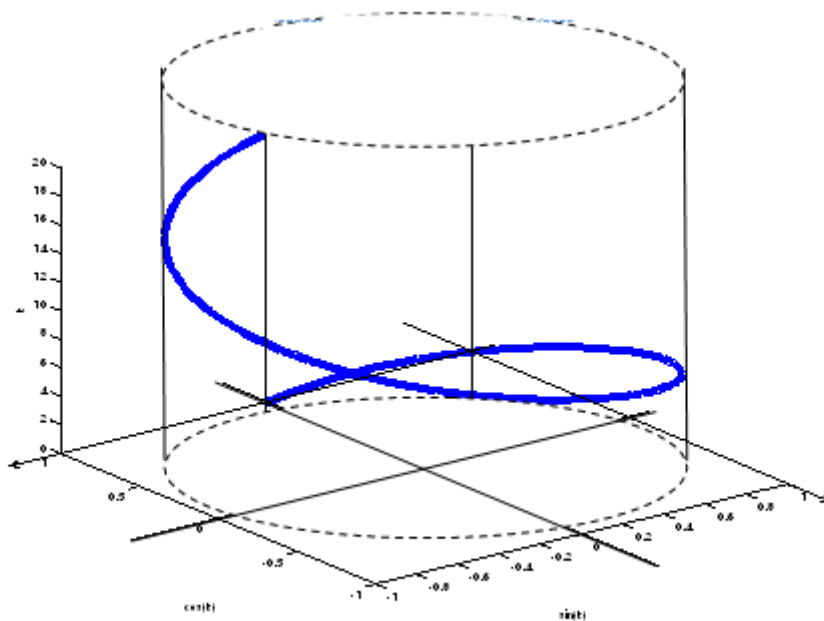
Rešitev:

Zaradi  $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, 3t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  je  $x(t)=\cos t$ ,  $y(t)=\sin t$  in  $z(t)=3t$ . Funkcija  $\vec{F}(\vec{r})=(z, x, y)$  na tej krivulji je tedaj

$$\vec{F}(\vec{r}(t))=(z(t), x(t), y(t))=(3t, \cos t, \sin t)$$

Začetna točka  $A$  integriranja je točka, ki leži na krivulji  $C$  z enačbo  $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, 3t)$  pri  $t=0$ , končna točka  $B$  pa je točka, ki leži na tej krivulji pri vrednosti parametra  $t=2\pi$ .

Torej:  $A(1,0,0)$  in  $B(1,0,6\pi)$ . Ko parameter  $t$  zavzame vse vrednosti med 0 in  $2\pi$ , se točka po vijčnici dvigne za  $6\pi \approx 18,8$  (slika 2.11).

Slika 2.11: Vijačnica  $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, 3t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ 

Zaradi  $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, 3t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  je  $d\vec{r}(t)=(-\sin t, \cos t, 3)dt$ .

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} (3t, \cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 3) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-3t \sin t + \cos^2 t + 3 \sin t) dt = \left[ -3(-t \cos t + \sin t) + \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) - 3 \cos t \right]_0^{2\pi} = 7\pi \end{aligned}$$

◆◆◆

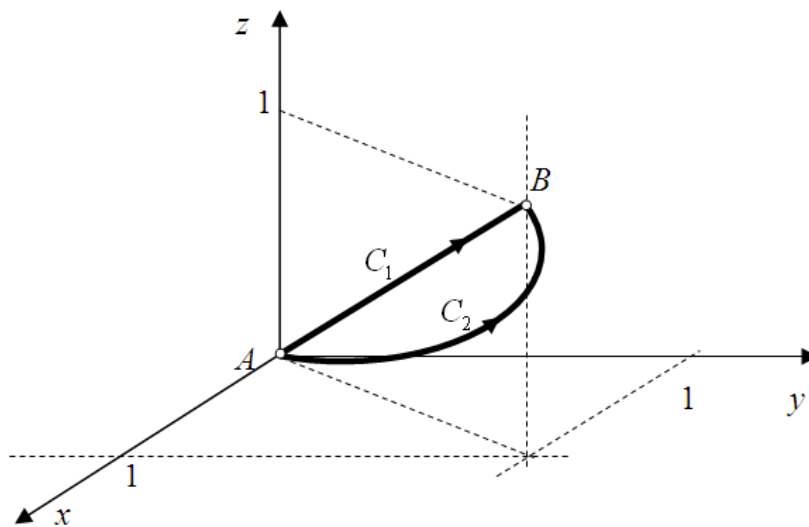
Pri krivuljnem integralu je pomemben izbor poti, po kateri integriramo. Poglejmo si to dejstvo na primeru.

Primer:

Vzemimo vektorsko funkcijo  $\vec{F}(\vec{r})=(5z, xy, x^2z)$  in dve točki, začetna  $A(0,0,0)$  in končna  $B(1,1,1)$ , do katere naj vodita dve poti  $C_1$  in  $C_2$  (slika 2.12). Izračunajmo krivuljni integral po vsaki poti posebej.

Rešitev:

Na sliki 2.12 vidimo obe poti z isti začetno točko  $A$  in isto končno točko  $B$ .



Slika 2.12: Dve različni poti z isto začetno in končno točko

Parametrični enačbi obeh krivulj zapišemo brez težav.

$C_1$  je daljica med točkama  $A$  in  $B$  z enačbo:  $\vec{r}_1(t) = (t, t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$C_2$  je parabolični lok med točkama  $A$  in  $B$  z enačbo:  $\vec{r}_2(t) = (t, t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

a) Zaradi  $\vec{r}_1(t) = (t, t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$  je  $\vec{F}(\vec{r}_1(t)) = (5z, xy, x^2z) = (5t, t^2, t^3)$ . Ker je odvod  $\dot{\vec{r}}_1(t) = (1, 1, 1)$ , je krivuljni integral po poti  $C_1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_1(t) dt = \int_0^1 (5t, t^2, t^3) \cdot (1, 1, 1) dt = \\ &= \int_0^1 (5t + t^2 + t^3) dt = \left( \frac{5t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

b) Zaradi  $\vec{r}_2(t) = (t, t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$  je  $\vec{F}(\vec{r}_2(t)) = (5z, xy, x^2z) = (5t^2, t^2, t^4)$ . Ker je odvod  $\dot{\vec{r}}_2(t) = (1, 1, 2t)$ , je skalarni produkt  $\vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_2(t) = (5t^2, t^2, t^4) \cdot (1, 1, 2t) = 5t^2 + t^2 + 2t^5 = 6t^2 + 2t^5$  in krivuljni integral po poti  $C_2$  je potem

$$I_2 = \int_{C_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_2(t) dt = \int_0^1 (6t^2 + 2t^5) dt = \left( \frac{6t^3}{3} + \frac{2t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{3}$$

Vidimo, da  $I_1 \neq I_2$ , čeprav je bil začetek in konec obeh poti enak. To pomeni, **da je krivuljni integral odvisen od poti**, po kateri opravimo integriranje.

◆◆◆

## 2.1.3 Greenov izrek

Dvojni integral nad nekim ravninskim območjem  $D$  je mogoče transformirati v krivuljni integral vzdolž meje tega območja in obratno, krivuljni integral vzdolž roba (ograje) nekega ravninskega območja  $D$  je mogoče pretvoriti v dvojni integral nad tem območjem. Takšne spremembe so koristne in uporabne v številnih praktičnih primerih.

O zvezi med dvojnimi in krivuljnimi integralom govori **Greenov<sup>2</sup> izrek** v ravnini.

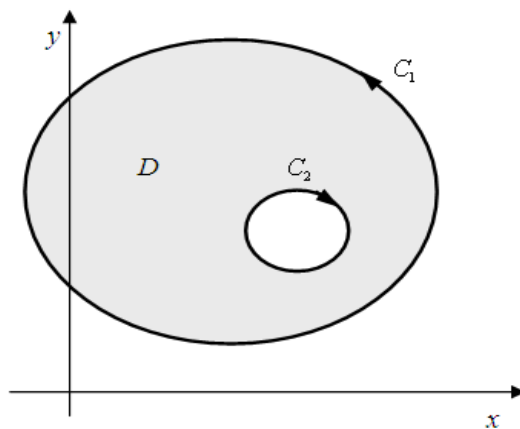
**Greenov izrek:** Naj bo  $D$  v ravnini  $(x, y)$  zaprto omejeno območje, omejeno z ograjo  $C$ , ki jo sestavlja končno mnogo gladkih krivulj. Naj bosta nadalje  $F_1(x, y)$  in  $F_2(x, y)$  dve zvezni funkciji z zveznima parcialnima odvodoma  $\frac{\partial F_1}{\partial y}$  in  $\frac{\partial F_2}{\partial x}$  povsod na vsakem območju, ki vsebuje območje  $D$ . Tedaj velja

$$\iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) \quad (2.23)$$

Pri računanju integrala na desni strani v (2.23) integriramo vzdolž celotne meje (ograje)  $C$  območja  $D$  v taki smeri, da je območje  $D$  vedno na levi strani.

### Opomba:

Na sliki 2.13 je prikazan primer smeri integriranja vzdolž krivulje. Območje  $D$  je glede na smer premikanja po krivulji vedno na levi strani, zato po ograji  $C_1$  integriramo v nasprotni smeri urinega kazalca, po  $C_2$  pa v smeri urinega kazalca.



Slika 2.13: Smer integriranja krivuljnega integrala v formuli (2.23)

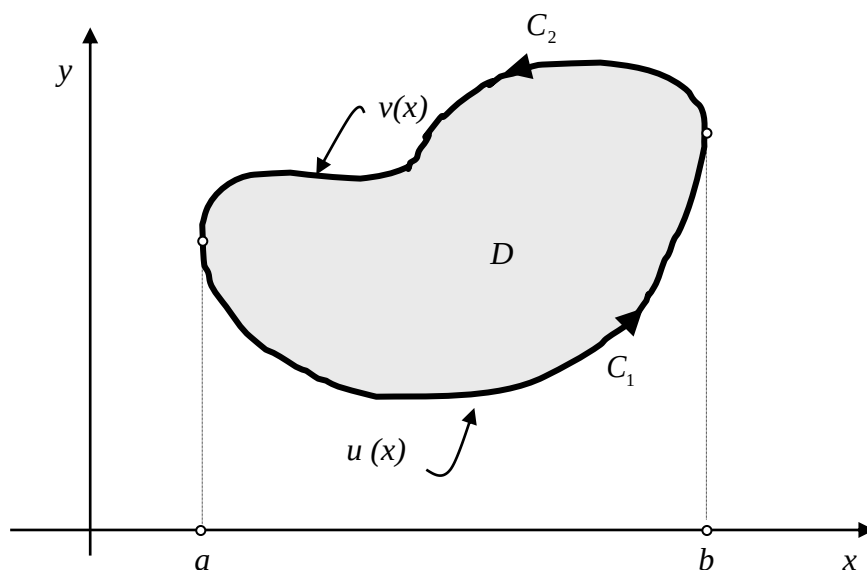
<sup>2</sup> George GREEN (1793 – 1841), britanski (angleški) matematik.

Dokaz:

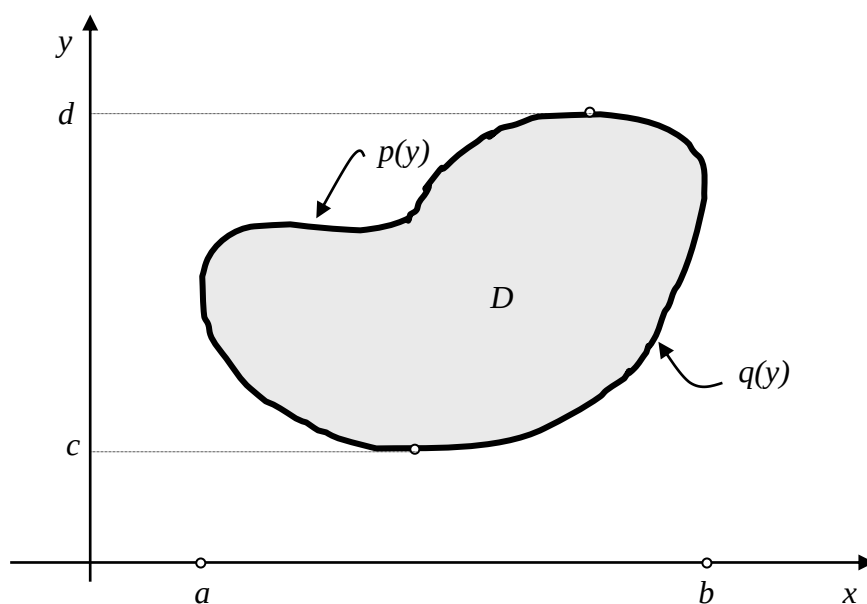
Dokažimo Greenov izrek za območje  $D$ , ki je določeno s pogoji

$$\begin{array}{ll} u(x) \leq y \leq v(x) & a \leq x \leq b \\ \text{in} & p(y) \leq x \leq q(y) & c \leq y \leq d \end{array}$$

Grafično sta oba pogoja prikazana na slikah 2.14 in 2.15.



Slika 2.14: Območje  $D$  določeno s pogoji  $u(x) \leq y \leq v(x)$  za  $a \leq x \leq b$



Slika 2.15: Območje  $D$  določeno s pogoji  $p(y) \leq x \leq q(y)$  za  $c \leq y \leq d$

Po formuli (1.28) lahko zapišemo

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \right) dx$$

Izračunajmo ta integral.

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b \left[ F_1(x, y) \Big|_{y=u(x)}^{y=v(x)} \right] dx = \int_a^b \left[ F_1(x, v(x)) - F_1(x, u(x)) \right] dx = \\ &= \int_a^b \left[ F_1(x, v(x)) \right] dx - \int_a^b \left[ F_1(x, u(x)) \right] dx = - \int_b^a \left[ F_1(x, v(x)) \right] dx - \int_a^b \left[ F_1(x, u(x)) \right] dx \end{aligned}$$

V prvem integralu smo zamenjali meji, zato smo dobili negativni predznak.

Iz slike 2.14 vidimo, da je  $y = u(x)$  krivulja  $C_1$ , medtem ko je  $y = v(x)$  enačba krivulje  $C_2$ . Očitno je vsoto zadnjih dveh integralov mogoče zapisati kot krivuljni integral vzdolž celotne meje območja  $D$ .

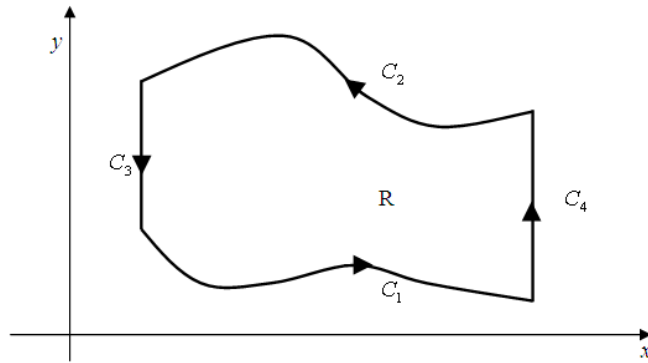
$$\int_b^a F_1(x, y) dx + \int_a^b F_1(x, y) dx = \oint_C F_1(x, y) dx$$

Od tod

$$\boxed{\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = - \oint_C F_1(x, y) dx} \quad (2.24)$$

S tem je Greenov izrek za  $F_2(x, y) = 0$  dokazan.

Zlahka ugotovimo, da se zapis (2.24) ne spremeni, tudi če bi bil del krivulje, vzdolž katere računamo krivuljni integral, vzporeden z osjo  $y$ , kot recimo  $C_3$  in  $C_4$  na sliki 2.16.



Slika 2.16: Območje R, omejeno z vzporednicama osi y

V integralu (2.24) namreč integriramo krivuljni integral po  $x$ , zato je seveda krivuljni integral vzdolž krivulje  $C_3$  in  $C_4$  enak nič.

Podobno, kot smo v (2.24) dokazali Greenov izrek za integriranje po spremenljivki  $x$ , lahko sedaj v skladu s formulo (1.20) in grafično predstavitvijo na sliki 2.15 zapišemo

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \int_c^d \left[ \int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx \right] dy = \int_c^d F_2[q(y), y] dy - \int_c^d F_2[p(y), y] dy = \oint_C F_2(x, y) dy$$

Če od pravkar dobljenega izraza odštejemo (2.24), res dobimo Greenovo formulo (2.23). S tem je Greenov izrek za poseben primer območja  $D$  dokazan.

Območje  $D$  pa je lahko tudi sestavljeno iz končnega števila območij, omejenih s sklenjenimi krivuljami. Veljavnost Greenovega izreka dokažemo v tem primeru tako, da uporabimo prejšnjo ugotovitev za vsako podobmočje posebej. Ta del dokaza bomo tu izpustili, bralec ga lahko najde v katerem od omenjenih del ob koncu knjige (npr. Vidav, Kreyszig).

Greenovo formulo lahko zapišemo tudi v drugačni obliki. Poznamo že rotor vektorskega polja  $\vec{F}$ , ki je določen z izrazom

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Zaradi ortogonalnosti enotskih vektorjev  $\vec{i}, \vec{j}$  in  $\vec{k}$  in lastnosti skalarnega produkta dveh vektorjev je skalarni produkt vektorjev  $\text{rot} \vec{F}$  ter  $\vec{k}$  takšen



$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{k} = \left[ \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \cdot \vec{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

V Greenovi formuli (2.23) nastopa v dvojnem integralu dobljeni izraz  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ , zato moremo to formulo zapisati tudi v tejle pripravi obliki

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{k} \, dx \, dy &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \vec{F} &= (F_1, F_2) \end{aligned}} \quad (2.25)$$

Navedimo še eno koristno povezavo, ki sledi iz Greenovega izreka.

Vzemimo najprej  $\vec{F}_1 = 0$  in  $\vec{F}_2 = x$ . Tedaj je  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$  in  $\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \oint_C x \, dy$ .

Formula (2.23) se v tem primeru glasi  $\iint_D dx \, dy = \oint_C x \, dy$ .

V nadaljevanju vzemimo  $\vec{F}_1 = -y$  in  $\vec{F}_2 = 0$ . V tem primeru je spet  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$  in  $\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = -\oint_C y \, dx$ . Po formuli (2.23) dobimo za ta primer  $\iint_D dx \, dy = -\oint_C y \, dx$ .

Ko seštejemo oba dobljena izraza, imamo  $2 \iint_D dx \, dy = \oint_C x \, dy - \oint_C y \, dx$  in od tod

$$\iint_D dx \, dy = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx)$$

Upoštevajmo, da je  $\iint_D dx \, dy$  ploščina  $S$  območja  $D$  in dobimo tole zanimivo formulo za ploščino območja  $D$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx)} \quad (2.26)$$

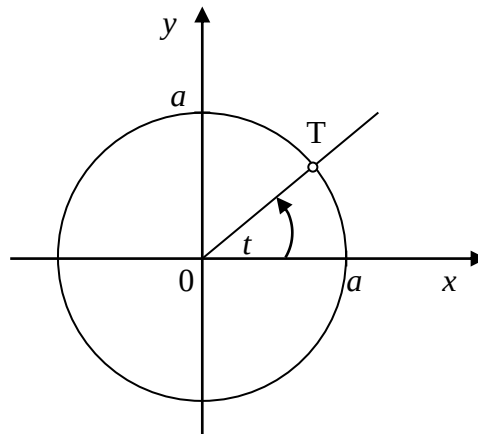
Po formuli (2.26) je mogoče izračunati ploščino nekega območja z integriranjem po meji (ograji) tega območja. Integriranje po krivulji seveda poteka v smeri, ki je določena v Greenovem izreku.

Primer:

Izračunajmo z uporabo formule (2.26) ploščino kroga.

Rešitev:

Krog je omejen s krožnico, dano z enačbo  $x^2 + y^2 = a^2$ . V parametrični obliki enačbo krožnice zapišemo v obliki:  $x = a \cdot \cos t$ ,  $y = a \cdot \sin t$ , kjer je parameter  $t$  kot, ki zavzame vse vrednosti med 0 in  $2\pi$ .



Iz  $x = a \cdot \cos t$ ,  $y = a \cdot \sin t$  dobimo odvoda  $\dot{x} = -a \sin t$  in  $\dot{y} = a \cos t$ . Zaradi  $dx = \dot{x} dt = -a \sin t dt$  in  $dy = \dot{y} dt = a \cos t dt$  je  $x dy - y dx = (x \dot{y} - y \dot{x}) dt = a^2 dt$ . Z uporabo (2.26) dobimo znano formulo za ploščino kroga

$$S = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 dt = \frac{a^2}{2} t \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2$$

◆◆◆

Če je krivulja dana s polarnimi koordinatami  $\varphi$  in  $r$ , je zveza med koordinatama  $x$  in  $y$  ter  $\varphi$  in  $r$  znana:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Spremenljivki  $x$  in  $y$  sta v tem primeru funkciji dveh spremenljivk,  $x = f(\varphi, r)$ ,  $y = g(\varphi, r)$ . Vemo, da sta diferenciala  $dx$  ter  $dy$ :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial r} dr = -r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi dr \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial r} dr = r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr \end{aligned}$$

Od tod je

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= x(r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr) - y(-r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi dr) = \\ &= r \cos \varphi (r \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr) - r \sin \varphi (-r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi dr) = r^2 d\varphi \end{aligned}$$

Formulo (2.26) lahko zapišemo v obliki

$$S = \frac{1}{2} \oint_C r^2 d\varphi \quad (2.27)$$

Primer:

Vzemimo spet kar ponovno krog. Krožnica ima v polarnih koordinatah enačbo  $r=a$ . Kot  $\varphi$  mora preteči vse vrednosti od 0 do  $2\pi$ .

Po formuli (2.27) dobimo

$$S = \frac{1}{2} \oint_C r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2$$

◆◆◆

## 2.2 PLOSKOVNI INTEGRAL

### 2.2.1 Ploskve v prostoru

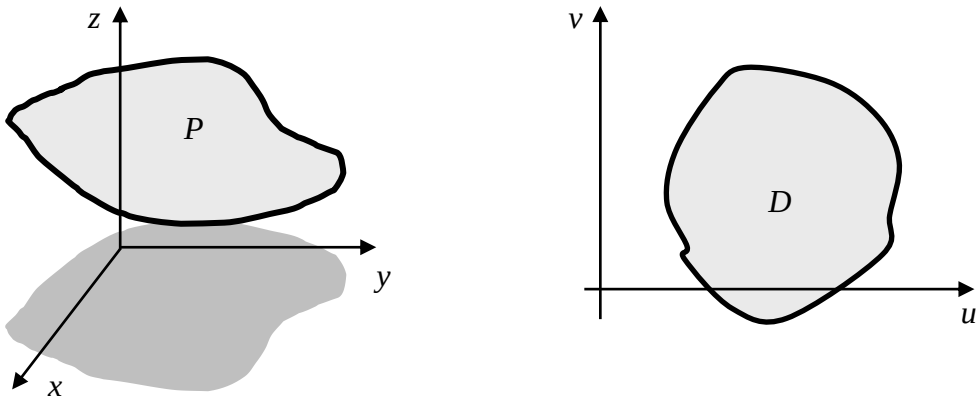
Vzemimo ploskev  $P$  v koordinatnem prostoru  $(x, y, z)$ . Njena enačba je

$$z = f(x, y) \quad (2.28)$$

ali tudi

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2.28a)$$

Podobno, kot smo v poglavju o krivuljnem integralu ugotovili, da si delo močno poenostavimo, če vpeljemo parametrično enačbo krivulje, bomo tudi ploskve zapisovali v parametrični obliki. Ker je ploskev dvodimenzionalna tvorba, bomo vpeljali dva parametra, označimo ju z  $u$  in  $v$ . Na ta način bomo ploskev  $P$  v prostoru preslikali na ravninsko območje  $D$  v ravnini  $(u, v)$ , slika 2.17.

Slika 2.17: Ploskev  $P$  v prostoru  $(x, y, z)$  in območje  $D$  na ravnini  $(u, v)$ 

Do vsake točke na ploskvi  $P$  vodi radij vektor  $\vec{r} = (x, y, z)$ , ki je z vpeljavo parametrov  $u$  in  $v$  odvisen od teh dveh parametrov. Parametrična enačba ploskve  $P$  je potem

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (2.29)$$

V (2.29) parametra  $u$  in  $v$  zavzameta vse vrednosti iz območja  $D$ .

#### Primer:

Naj bo ploskev  $P$  v prostoru krogla s polmerom  $a$  in središčem v koordinatnem izhodišču. Vemo, da je tedaj njena enačba takšna:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Vpeljimo parametra  $u$  in  $v$  tako, da je  $u$  kot med osjo  $x$  in krakom v vodoravni ravnini in preteče vrednosti med  $0$  in  $2\pi$ ,  $v$  pa je kot, ki ima en krak na osi  $z$ , drugi pa se spreminja v navpični smeri med  $-\frac{\pi}{2}$  in  $+\frac{\pi}{2}$ . Sedaj so komponente radij vektorja  $\vec{r} = (x, y, z)$ , ki opisujejo vse točke na krogli, takšne:  $x = a \cos v \cos u$ ,  $y = a \cos v \sin u$ ,  $z = a \sin v$ . Enačba krogle se v parametrični obliki glasi:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

ali pa tudi takole:

$$\vec{r}(u, v) = a \cos v \cos u \cdot \vec{i} + a \cos v \sin u \cdot \vec{j} + a \sin v \cdot \vec{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

◆◆◆

Naj bo ploskev  $P$  dana s parametrično enačbo (2.29). Naj bosta nadalje  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  odvedljivi funkciji parametra  $t$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , tako da vse dvojice  $(u(t), v(t))$  leže na definicijskem območju funkcije  $\vec{r}(u, v)$ . Tedaj je  $\vec{r}_C(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$  enačba neke krivulje  $C$ , ki poteka po ploskvi  $P$ . Vzemimo še neko točko  $T$ , ki leži na ploskvi  $P$  in na krivulji  $C$ . Odvajajmo funkcijo  $\vec{r}_C(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$  po  $t$  in dobimo:

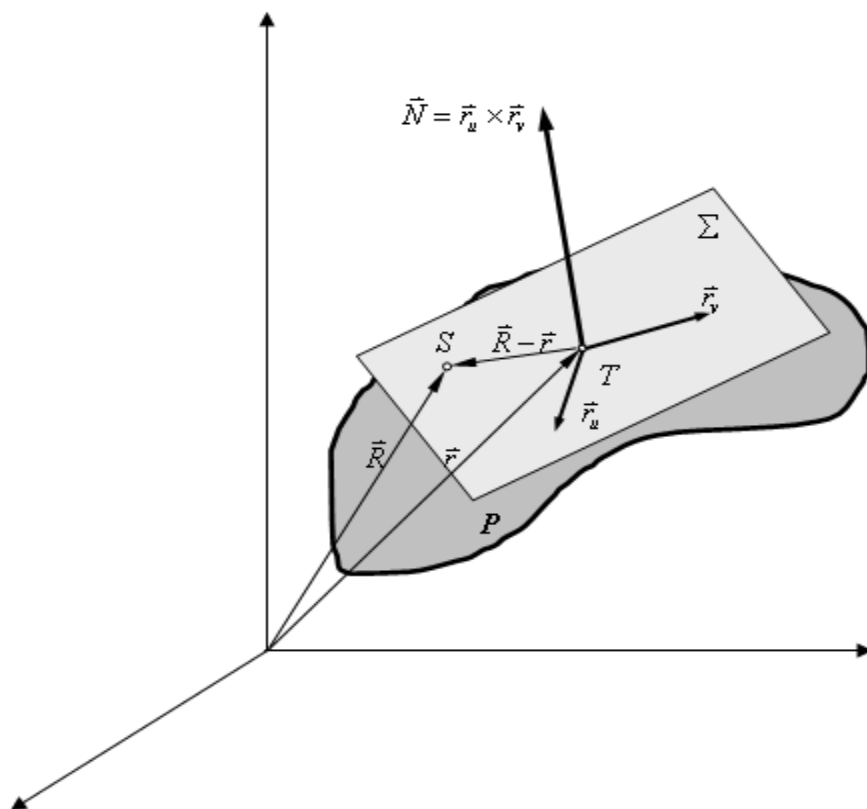
$$\dot{\vec{r}}_C(t) = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \dot{v} \quad (2.30)$$

Vzemimo, da je funkcija  $\vec{r}_C(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$  odvedljiva v dani točki  $T$ , kjer je njen odvod ravno tangentni vektor na krivuljo  $C$ .

Označimo parcialna odvoda takole

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad (2.31)$$

Vektorja  $\vec{r}_u$  in  $\vec{r}_v$  sta odvisna le od lege točke  $T$  na ploskvi  $P$ , nič pa od krivulje skozi to točko. Vzemimo, da sta vektorja  $\vec{r}_u$  in  $\vec{r}_v$  linearno neodvisna, to pa pomeni, da nista vzporedna in da določata neko ravnino. Tej ravnini pravimo *tangentna ravnina*  $\Sigma$  na ploskev  $P$  v točki  $T$  (slika 2.18). Oba parcialna odvoda imata seveda smer tangente na ploskev  $P$  v točki  $T$ , saj je njuna linearna kombinacija ravno tangentni vektor  $\dot{\vec{r}}_C(t)$ .



Slika 2.18: Tangentna ravnina  $\Sigma$  in normala na ploskev  $P$  v točki  $T$

Vektor  $\dot{\vec{r}}_C(t) = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}$  leži na tangenti krivulje  $C$  v točki  $T$ , zato leži tudi v tangentski ravnini. Skozi poljubno točko  $T$  na ploskvi  $P$  poteka neskončno mnogo krivulj. Vse tangente, ki jih postavimo v točki  $T$  na te krivulje, leže v tangentski ravnini  $\Sigma$ .

Ker ležita vektorja  $\vec{r}_u$  in  $\vec{r}_v$  v tangentski ravnini, je njun vektorski produkt  $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$  nanjo pravokoten. Na tangentski ravnini leži točka  $T$ , do katere vodi krajevni vektor  $\vec{r}$ . Vzemimo na tangentski ravnini poljubno točko  $S$ , do katere naj vodi krajevni vektor  $\vec{R}$ . Razlika  $\vec{R} - \vec{r}$  je vektor, ki leži na tangentski ravnini in je pravokoten na vektorski produkt  $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ . Zato je njun skalarni produkt 0, torej

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0 \quad (2.32)$$

Zapis (2.32) je enačba tangentske ravnine.

Naj bo sedaj ploskev  $P$  dana z enačbo (2.28), to je  $z = f(x, y)$ . Za parametra lahko vzamemo kar  $x$  in  $y$ , pa dobimo enačbo ploskve v obliki  $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ . Če označimo

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.33)$$

sta odvoda funkcije  $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$  po parametrih

$$\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, p), \vec{r}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, q)$$

Njun vektorski produkt je

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = -p\vec{i} - q\vec{j} + \vec{k} = (-p, -q, 1)$$

Koordinate točke  $S$ , to so komponente vektorja  $\vec{R}$  naj bodo  $X, Y$  in  $Z$ , torej  $\vec{R} = (X, Y, Z)$ , točka  $T$ , kjer se tangentska ravnina dotika ploskve  $P$ , pa naj ima koordinate  $x, y$ , in  $z$ , torej je  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Enačbo (2.32) lahko zapišemo s komponentami

$$\begin{aligned} (\vec{R} - \vec{r}) \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) &= 0 \\ (X - x, Y - y, Z - z) \cdot (-p, -q, 1) &= 0 \\ -p(X - x) - q(Y - y) + (Z - z) &= 0 \end{aligned}$$

oziroma

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \quad (2.34)$$

Ko je ploskev  $P$  dana z implicitno enačbo (2.28a), to je  $F(x, y, z) = 0$  oziroma  $F(x, y, f(x, y)) = 0$ , dobimo z odvajanjem po  $x$  in po  $y$  izraza  $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0$  ter  $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0$ , od koder izračunamo odvoda  $p$  in  $q$ :

$$p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Vstavimo oba izraza v enačbo tangentne ravnine (2.34), uredimo in že imamo tangentno ravnino zapisano v tej obliki

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2.35)$$

Vidimo, da je leva stran v (2.35) skalarni produkt vektorjev  $(X - x, Y - y, Z - z)$  in  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ . Vemo pa tudi, da je vektor  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$  ravno gradient skalarne funkcije  $F$ , torej  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \text{grad}F$ , zato moremo enačbo tangentne ravnine zapisati tudi

$$(\bar{R} - \bar{r}) \cdot \text{grad}F = 0 \quad (2.36)$$

Iz (2.36) vidimo, da je  $\text{grad}F$  vektor, ki je pravokoten na tangentno ravnino.

Definicija: Normalni vektor  $\bar{n}$  (ali tudi kar: normala) na ploskev  $P$  v točki  $T$  je vektor, ki je pravokoten na tangentno ravnino  $\Sigma$  ploskve  $P$  v točki  $T$ .

Normala na ploskev  $P$  je torej vektor, ki gre skozi dotikališče  $T$  in stoji pravokotno na tangentno ravnino v tej točki. Lahko rečemo tudi, da normala pravokotno prebode ploskev.

Vektorja  $\vec{r}_u$  in  $\vec{r}_v$ , določena z (2.31), ležita v tangentni ravnini, njun vektorski produkt je vektor, ki je pravokoten na oba, torej pravokoten na tangentno ravnino, zato ima smer normale na ploskev  $P$ .

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \quad (2.37)$$

Vektorju  $\vec{N}$  prirejen enotski vektor je

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \quad (2.38)$$

Ko je ploskev  $P$  dana z eksplisitno enačbo (2.28), to je  $z = f(x, y)$  in za parametra lahko vzamemo kar  $x$  in  $y$ , dobimo enačbo ploskve v obliki  $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ . Odvoda te funkcije po parametrih sta

$$\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, p), \quad \vec{r}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, q) \quad (2.39)$$

Njun vektorski produkt pa je

$$\vec{N} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = (-p, -q, 1) \quad (2.40)$$

Pri tem sta  $p$  in  $q$  določena z (2.33), to je:  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ .

Enotni vektor na normali je

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} (-p, -q, 1) = \left( -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \right)$$

Ker je  $\vec{n}$  enotni vektor, so njegove komponente smerni kosinusi normale.

$$\cos \alpha = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \cos \beta = -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad (2.41)$$



Ko pa je ploskev  $P$  dana z implicitno enačbo (2.28a), to je  $F(x, y, z) = 0$  oziroma  $F(x, y, f(x, y)) = 0$ , je  $\text{grad}F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$  vektor, ki je pravokoten na tangentno ravnino, torej ima smer normale. Enotni vektor na normali potem lahko zapišemo tudi takole

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}F}{|\text{grad}F|} \quad (2.42)$$

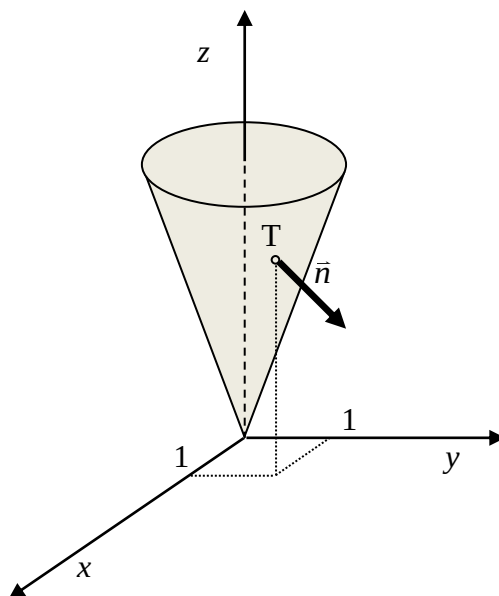
Primer:

Izračunajmo enotni vektor na normali, ki jo postavimo na stožec z enačbo  $z^2 = 4(x^2 + y^2)$  v točki  $T(1, 1, 2\sqrt{2})$ .

Rešitev:

Implicitna enačba ploskve je  $F(x, y, z) = 0$ , za stožec v tem primeru je  $F(x, y, z) = 4(x^2 + y^2) - z^2$ . Od tod dobimo  $\text{grad}F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (8x, 8y, -2z)$ . V dani točki  $T(1, 1, 2\sqrt{2})$  pa je gradient tale vektor:  $\text{grad}F(T) = (8, 8, -4\sqrt{2})$ . Iskani enotni vektor je po formuli (2.42):

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}F}{|\text{grad}F|} = \frac{1}{\sqrt{64+64+32}}(8, 8, -4\sqrt{2}) = \left( \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$



Koti, ki jih vektor  $\vec{n}$  oklepa s koordinatnimi osmi, so:

$$\cos \alpha = \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0,632455 \Rightarrow \alpha = \beta \approx 0,89 \text{ rad} \approx 50,8^\circ$$

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}} \approx -0,44721 \Rightarrow \gamma \approx 2,03 \text{ rad} \approx 116,5^\circ$$

◆◆◆

Definicija:

Ploskev  $P$  je gladka (angl.: smooth surface), če ima v vsaki točki tangentno ravnino. Ploskev  $P$  je odsekoma gladka (angl.: piecewise smooth), če jo lahko razdelimo na končno mnogo gladkih delov.

Primer:

Plašč krogle (sfera) je gladka ploskev, plašč kocke pa je odsekoma gladka ploskev. Na robovih kocke tangentne ravnine ne moremo postaviti oz. jih je neskončno mnogo.

◆◆◆

## 2.2.2 Ploskovni integral, definicija in računanje

Vzemimo odsekoma gladko ploskev  $P$ , podano s parametrično enačbo v vektorski obliki (2.29)

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ (u, v) \in D$$

Ker je ploskev odsekoma gladka, obstoja normalni vektor  $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$  in enotni normalni vektor  $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$  v vsaki točki te ploskve, razen morda ne obstaja v končnem številu točk ploskve (npr. oglišče kocke, vrh stožca).

Definicija:

Ploskovni integral vektorske funkcije  $\vec{F}$  po ploskvi  $P$  je izraz

$$\boxed{\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP} \quad (2.43)$$

V (2.43) je  $\vec{F}$  vektorska funkcija (vektorsko polje) v prostoru,  $\vec{n}$  je enotni vektor na normali,  $dP$  je infinitezimalno majhen del ploskve. Ploskovni integral lahko razumemo tako, da smo ploskev  $P$  razdelili na neskončno mnogo infinitezimalno majhnih parcel, nato pa ploščino  $dP$

vsake parcele pomnožili s skalarnim produktom vektorske funkcije  $\vec{F}$  in enotne normale ploskve ter vse te produkte seštel. Ker je produktov neskončno mnogo in ker so infinitezimalno majhni, smo to seštevanje opravili z integralom.

Ta postopek je mogoče narediti ne glede na izbrani koordinatni sistem, zato je vrednost ploskovnega integrala vektorske funkcije neodvisna od izbire koordinatnega sistema.

V integrandu ploskovnega integrala je skalarni produkt dveh vektorjev ( $\vec{F} \cdot \vec{n}$ ), zato je rezultat seveda skalar. Skalarni produkt  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  je normalna komponenta vektorskega polja  $\vec{F}$ .

Ploskovni integral polja  $\vec{F}$  po ploskvi  $P$  imenujemo tudi *pretok (flux) polja  $\vec{F}$  skozi ploskev  $P$* . Od kod tako ime, bo pojasnil naslednji primer.

#### Primer:

Opazujmo stacionarno gibanje nestisljive tekočine v prostoru. Hitrost  $\vec{v}$  gibanja tekočine je v tem primeru odvisna le od mesta, ne pa tudi od časa. Zanima nas, koliko tekočine steče v časovni enoti skozi dano stran ploskve  $P$ .

V časovni enoti steče skozi infinitezimalno majhen del površine  $dP$  toliko tekočine, kot je prostornina kvadra z osnovno ploskvijo  $dP$  in višino  $v_n$ , ki pomeni normalno komponento hitrosti  $\vec{v}$ . Smer normale mora kazati v smeri gibanja tekočine. Če je  $\vec{n}$  enotni vektor, ki stoji pravokotno na  $dP$ , je skalarni produkt  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  ravno normalna komponenta hitrosti, torej  $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ .

Množina tekočine, ki steče skozi infinitezimalno majhen kos ploskve s ploščino  $dP$ , je potem prostornina kvadra, to je  $\vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dP$ .

retok tekočine skozi vso ploskev  $P$  pa dobimo, da seštejemo vse infinitezimalno majhne dele pretokov, kar storimo s ploskovnim integralom.

Pretok tekočine skozi ploskev  $P$  je potem enak integralu  $\iint_P \vec{v} \cdot \vec{n} dP$ .

◆◆◆

Ploskovni integral (2.43) lahko zapišemo tudi drugače.

Vzemimo, da vektor  $\vec{F}$  zapišemo s komponentami  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ . Vektor  $\vec{n}$  je enotni vektor, zato so njegove komponente kar kosinusi kotov, ki jih normala oklepa s koordinatnimi osmi (smerni kosinusi),  $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ , zato je skalarni produkt  $\vec{F} \cdot \vec{n} = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma$  in (2.43) lahko zapišemo takole

$$\boxed{\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP = \iint_P (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma) dP} \quad (2.44)$$

Ploskovni integral računamo tako, da ga prevedemo na dvojni integral. Zapišimo vse vektorske funkcije v parametrični obliki s parametroma  $u$  in  $v$ . Enačba (2.31) določa vektorja

$\vec{r}_u$  in  $\vec{r}_v$  takole:  $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ ,  $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ . Njun vektorski produkt je dan z (2.37),  $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ .

Velikost vektorskega produkta  $|\vec{N}| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$  je ploščina paralelograma, ki ga napnemo na vektorja  $\vec{r}_u$  in  $\vec{r}_v$ . Zato je diferencialno majhen del ploščine  $dP = |\vec{N}| du dv$  ploskve  $P$ . To enačbo pomnožimo na levi in desni z enotnim vektorjem  $\vec{n}$  na normali

$$\vec{n} dP = \vec{n} |\vec{N}| du dv$$

Zaradi (2.38) je  $\vec{n} |\vec{N}| = \vec{N}$  in

$$\vec{n} dP = \vec{n} |\vec{N}| du dv = \vec{N} du dv \quad (2.45)$$

Upoštevajmo (2.45) v definiciji ploskovnega integrala (2.43) in dobimo zvezo med ploskovnim in dvojnim integralom

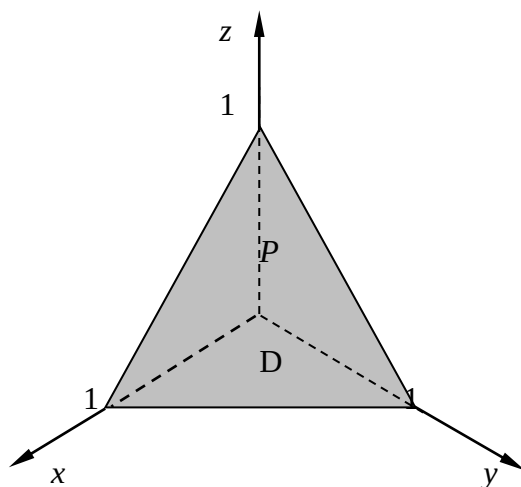
$$\iint_P \vec{F} \vec{n} dP = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \vec{N}(u,v) du dv \quad (2.46)$$

Dvojni integral seveda računamo na območju  $D$ , ki določa vse pare parametrov  $(u,v)$ .

#### Primer:

Izračunajmo ploskovni integral funkcije  $\vec{F} = (2x, 0, y^2)$  po ploskvi  $P$ , dani z enačbo  $x + y + z = 1$ ,  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  (prvi oktant).

#### Rešitev:



Ploskev  $P$  je skicirana na zgornji sliki.

Vzemimo parametra  $x = u$  in  $y = v$ , iz enačbe ploskve pa dobimo še  $z = 1 - u - v$ . Na ta način lahko ploskev zapišemo v vektorski obliki  $\vec{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ .

Območje  $D$  je enakokraki trikotnik na ravnini  $(u, v)$ , ki je v tem primeru kar ravnina  $(x, y)$ . Kraka trikotnika ležita na koordinatnih oseh, tretja stranica pa na premici  $x + y = 1$ . Območje  $D$  je torej določeno s pogoji:  $0 \leq x \leq 1 - y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . To bosta meji za dvojni integral.

Zaradi  $\vec{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$  je:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (1, 0, -1), \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 1, -1).$$

$$\vec{N}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{F}(u, v) = (2u, 0, v^2) \Rightarrow \vec{F}(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = (2u, 0, v^2) \cdot (1, 1, 1) = 2u + v^2$$

Po formuli (2.26) je  $\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) du dv$ . Dvojni integral bo potekal v mejah:

$$0 \leq u \leq 1 - v, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP &= \iint_D (2u + v^2) du dv = \int_0^{1-v} \int_0^{1-v} (2u + v^2) du dv = \int_0^1 \left( u^2 + uv^2 \right) \Big|_0^{1-v} dv = \\ &= \int_0^1 (1 - 2v + 2v^2 - v^3) dv = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

◆◆◆

V zgornjem primeru je bila funkcija dana v eksplicitni obliki  $z = f(x, y)$  in za parametra  $u$  in  $v$  smo vzeli kar  $x$  in  $y$ . V tem primeru smo že ugotovili, da lahko zapišemo enačbo ploskve v obliki  $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ . Odvoda te funkcije po parametrih  $x$  in  $y$  smo označili v (2.39):

$$\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, p) \quad \text{in} \quad \vec{r}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, q), \quad \text{njun vektorski produkt pa je dan v (2.40),}$$

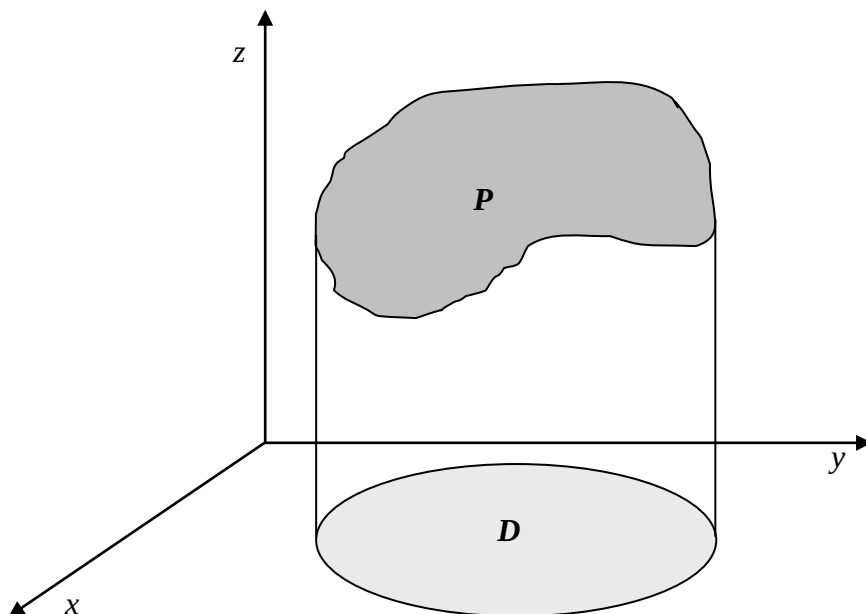
$$\vec{N}(x, y) = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = (-p, -q, 1). \quad \text{Ploskovni integral bo po formuli (2.46) takšen:}$$

$$\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(x, y)) \cdot \vec{N}(x, y) dx dy.$$

Naj bo vektorska funkcija (vektorsko polje) dana s komponentami  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , pa dobimo formulo

$$\iint_P \vec{F} \vec{n} dP = \iint_D (-F_1 p - F_2 q + F_3) dx dy \quad (2.47)$$

Območje  $D$  leži na ravnini  $(x, y)$  in pomeni projekcijo ploskve  $P$  na to ravnino (slika 2.19).



Slika 2.19: Ploskev  $P$  in njena projekcija  $D$  na ravnino  $(x, y)$

V ploskovnem integralu (2.43) nastopa enotni vektor  $\vec{n}$  na normali na ploskev  $P$ . Na ploskvi v splošnem razlikujemo dve strani. Ploskev je *dvostranska*, če ne moremo priti z ene strani na drugo, ne da bi prekoračili rob ploskve. Normala na ploskev je potemtakem lahko na eni ali na drugi strani ploskve. Če kaže vektor  $\vec{n}$  v eno smer, kaže v drugo smer vektor  $(-\vec{n})$ . To pomeni, da je v ploskovnem integralu pomembno, v katero smer kaže normala, zato mora biti ploskev orientirana.

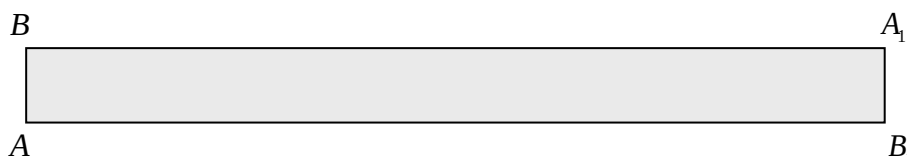
Ni vsaka ploskev dvostranska, primer enostranske ploskve je Möbiusov<sup>3</sup> trak, ki ga prikazujemo na sliki 2.20.

<sup>3</sup> August Ferdinand Möbius (1790-1868), nemški matematik, ukvarjal se je s pročevanjem ploskev, projektivno geometrijo in mehaniko.



Slika 2.20: Möbiusov trak, vir [http://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius\\_strip](http://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_strip)

Möbiusov trak dobimo, če v traku povežemo med seboj točki  $A-A_1$  in točki  $B-B_1$  (slika 2.21).



Slika 2.21: Trak sklenemo tako, da povežemo točke  $A-A_1$  in  $B-B_1$ .

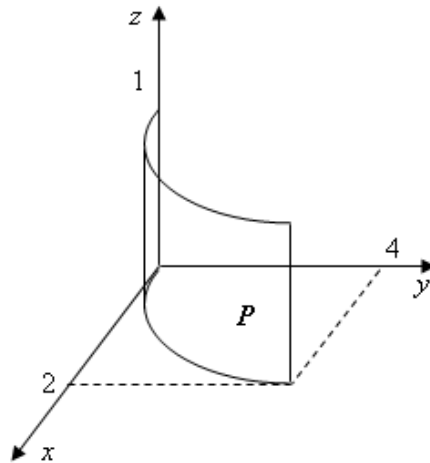
Ploskev  $P$ , po kateri računamo ploskovni integral, moramo torej *orientirati*. Ploskev orientiramo s tem, da izberemo eno stran ploskve za pozitivno, druga stran je potem negativna. Če zamenjamo orientacijo ploskve, nadomestimo enotni vektor na normali  $\vec{n}$  z nasprotnim vektorjem  $(-\vec{n})$ , kar pomeni, da vsako komponento vektorja  $\vec{n}$  pomnožimo z  $(-1)$ .

Zaradi definicije ploskovnega integrala (2.43), se integralu  $\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP$  zamenja predznak, če zamenjamo orientacijo.

$$\iint_P \vec{F} \cdot (-\vec{n}) dP = - \iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP \quad (2.48)$$

Primer:

Izračunajmo pretok funkcije  $\vec{F} = (z^2, xz, 5)$  skozi ploskev  $P$ , ki je podana z omejitvami:  $x \in [0, 2]$ ,  $z \in [0, 1]$ ,  $y = x^2$  (slika).

**Rešitev:**

Vpeljemo parametra  $u$  in  $v$  takole:  $u = x, v = z$ . Potem je  $y = u^2$  in ploskev  $P$  je v vektorski obliki takšna:  $\vec{r} = (u, u^2, v)$ , kjer sta parametra v mejah  $u \in [0, 2], v \in [0, 1]$ . Od tod sta oba parcialna odvoda  $\vec{r}_u = (1, 2u, 0), \vec{r}_v = (0, 0, 1)$  in

$$\vec{N}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2u, -1, 0)$$

Ker je funkcija zapisana v vektorski obliki in je sedaj takšna  $\vec{F}(\vec{r}(u, v)) = (v^2, uv, 5)$ , je skalarni produkt  $\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) = (v^2, uv, 5) \cdot (2u, -1, 0) = 2uv^2 - uv$ .

Ploskovni integral je po (2.43)

$$\begin{aligned} \iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) du dv = \int_0^1 \int_0^2 (2uv^2 - uv) du dv = \int_0^1 \left( u^2 v^2 - \frac{u^2 v}{2} \right) \Big|_0^2 dv = \\ &= \int_0^1 (4v^2 - 2v) dv = \left( \frac{4v^3}{3} - v^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Sedaj pa zamenjajmo orientacijo ploskve  $P$ , kar bomo storili tako, da bomo za parametra  $u$  in  $v$  vzeli  $u = z, v = x$ . Ploskev  $P$  v vektorski obliki bo sedaj takšna:  $\vec{r} = (v, v^2, u)$ ,  $u \in [0, 1], v \in [0, 2]$ . Parcialna odvoda sta  $\vec{r}_u = (0, 0, 1), \vec{r}_v = (1, 2v, 0)$ . Njun vektorski produkt (normala na ploskev  $P$ ) je

$$\vec{N}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2v & 0 \end{vmatrix} = (-2v, 1, 0)$$



Zaradi  $\vec{F}(\vec{r}(u,v)) = (u^2, uv, 5)$ , je skalarni produkt  $\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{N}(u,v)$  sedaj takšen:  
 $\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{N}(u,v) = (u^2, uv, 5) \cdot (-2v, 1, 0) = -2u^2v + uv$ .

Ploskovni integral (2.43) pa je

$$\begin{aligned} \iint_P \vec{F} \vec{n} dP &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \vec{N}(u,v) du dv = \int_0^2 \int_0^1 (-2u^2v + uv) du dv = \int_0^2 \left( -\frac{2u^3v}{3} + \frac{u^2v}{2} \right) \Big|_0^1 dv = \\ &= \int_0^2 \left( -\frac{2v}{3} + \frac{v}{2} \right) dv = \left( -\frac{2v^2}{6} + \frac{v^2}{4} \right) \Big|_0^2 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ploskovni integral se razlikuje v predznaku, če zamenjamo orientacijo ploskve  $P$ . Pri  $\vec{N} = (2u, -1, 0)$  je pretok vektorske funkcije  $\frac{1}{3}$  enot, pri nasprotni orientaciji, ko je  $\vec{N} = (-2v, 1, 0)$ , pa je pretok po velikosti seveda enak, vendar zaradi nasprotne orientacije nasprotno predznačen.

◆◆◆

Zaradi odvisnosti ploskovnega integrala od orientacije običajno pišemo v splošni obliki pred ploskovni integral možnost obeh predznakov, to je

$$\iint_P \vec{F} \vec{n} dP = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \vec{N}(u,v) du dv$$

Če je funkcija dana v eksplicitni obliki, pa je

$$\iint_P \vec{F} \vec{n} dP = \pm \iint_D (-F_1 p - F_2 q + F_3) dx dy$$

Vzemimo ploskovni integral v obliki (2.44), to je

$$\iint_P \vec{F} \vec{n} dP = \pm \iint_P (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma) dP$$

Smerni kosinusi  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  in  $\cos \gamma$  so komponente enotnega vektorja  $\vec{n}$  na normali  $\vec{N}$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  in  $F_3$  pa so komponente vektorske funkcije (polja)  $\vec{F}$ . Ploskev  $P$  in funkcijo  $\vec{F}$  smo postavili v koordinatni sistem  $(x, y, z)$ . Potem je tole res

$$\iint_P F_1 \cos \alpha dP = \iint_P F_1 dydz \quad (2.49)$$

$$\iint_P F_2 \cos \beta dP = \iint_P F_2 dzdx \quad (2.50)$$

$$\iint_P F_3 \cos \gamma dP = \iint_P F_3 dxdy \quad (2.51)$$

Ko te izraze upoštevamo v (2.44), dobimo

$$\begin{aligned} \iint_P \vec{F} \vec{n} dP &= \iint_P (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma) dP = \iint_P F_1 \cos \alpha dP + \iint_P F_2 \cos \beta dP + \iint_P F_3 \cos \gamma dP = \\ &= \iint_P F_1 dydz + \iint_P F_2 dzdx + \iint_P F_3 dxdy = \iint_P (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy) \end{aligned}$$

Od tod sledi formula

$$\boxed{\iint_P \vec{F} \vec{n} dP = \iint_P (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy)} \quad (2.52)$$

V (2.52) lahko oklepaj tudi izpustimo in ploskovni integral zapišemo kar v takšni obliki

$$\boxed{\iint_P \vec{F} \vec{n} dP = \iint_P F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy} \quad (2.52a)$$

Primer:

Vzemimo kar prejšnji primer, ki smo računali pretok funkcije  $\vec{F} = (z^2, xz, 5)$  skozi ploskev  $P$ , ki je podana z zahtevami  $x \in [0, 2]$ ,  $z \in [0, 1]$ ,  $y = x^2$ .

Rešitev:

Tu je  $F_1 = z^2$ ,  $F_2 = xz$ ,  $F_3 = 5$ .

Vzeli smo:  $u = x$ ,  $v = z$ , zato je  $y = u^2$  in ploskev  $P$  je v vektorski obliki  $\vec{r} = (u, u^2, v)$ . Od tod sta oba parcialna odvoda  $\vec{r}_u = (1, 2u, 0)$ ,  $\vec{r}_v = (0, 0, 1)$  in

$$\vec{N}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2u, -1, 0)$$

Zapišimo spet spremenljivke  $x, y$  in  $z$  in imamo normalo  $\vec{N} = (2x, -1, 0)$ , enotni vektor na njej

pa je  $\vec{n} = \frac{1}{|\vec{N}|} \vec{N} = \frac{(2x, -1, 0)}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \left( \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}, 0 \right)$ , torej velja

$\cos \alpha = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} > 0$ ,  $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} < 0$ ,  $\cos \gamma = 0$ . Ker je  $\cos \beta$  negativen, bomo glede na (2.50) v integralu tam dobili negativen predznak, zaradi  $\cos \gamma = 0$  pa je v skladu z (2.51) tretji integral nič. Meje integriranja so podane s projekcijo ploskev  $P$  na posamezne ravnine,  $x \in [0, 2]$ ,  $z \in [0, 1]$ ,  $y = x^2 \in [0, 4]$ .

Iz formule (2.52) sledi

$$\begin{aligned} \iint_P \vec{F} \vec{n} dP &= \iint_P (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy) = \iint_P F_1 dydz + \iint_P F_2 dzdx + \iint_P F_3 dxdy = \\ &= \int_0^1 \int_0^4 z^2 dydz - \int_0^2 \int_0^1 xz dzdx = \int_0^1 (z^2 y)_0^4 dz - \int_0^2 \left( \frac{xz^2}{2} \right)_0^1 dx = \\ &= \int_0^1 4z^2 dz - \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Rezultat je seveda takšen, ko smo ga dobili že v prejšnjem primeru.

◆◆◆

### 2.2.2.1 Površina ploskve

Vzemimo ploskev  $P$  v prostoru in vektorsko funkcijo nad to ploskvijo. Tedaj napišemo ploskovni integral vektorske funkcije  $\vec{F}$  po ploskvi  $P$  z izrazom

$$\iint_P \vec{F} \vec{n} dP = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \vec{N}(u, v) du dv$$

Skalarni produkt  $\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \vec{N}(u, v)$  pišemo po definiciji

$$\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \vec{N}(u, v) = |\vec{F}(\vec{r}(u, v))| \cdot |\vec{N}(u, v)| \cos \varphi$$

Ko sta vektorja pravokotna, je  $\cos \varphi = 0$  in  $\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \vec{N}(u, v) = |\vec{F}(\vec{r}(u, v))| \cdot |\vec{N}(u, v)|$ . Naj bo sedaj še  $|\vec{F}(\vec{r}(u, v))| = 1$  in pretok polja (ploskovni integral) je kar enak površini ploskve, po kateri integriramo

$$S = \iint_P dP = \iint_D |\vec{N}(u, v)| du dv$$

Ker je po (2.37) res  $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ , je površina ploskve

$$S = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv \quad (2.53)$$

Primer:

Z uporabo ploskovnega integrala izračunajmo površino krogle.

Rešitev:

Enačba krogle, ki ima središče v izhodišču koordinatnega sistema, je  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Vpeljemo parametra  $u$  in  $v$  tako, da je  $u$  kot med osjo  $x$  in krakom  $v$  vodoravni ravnini in preteče vrednosti med  $0$  in  $2\pi$ ,  $v$  pa je kot, ki ima en krak na osi  $z$ , drugi pa se spreminja v navpični smeri med  $-\frac{\pi}{2}$  in  $+\frac{\pi}{2}$ . Potem so komponente krajevnega vektorja  $\vec{r} = (x, y, z)$ , ki opisujejo vse točke na krogli, takšne:  $x = a \cos v \cos u$ ,  $y = a \cos v \sin u$ ,  $z = a \sin v$ . Enačba krogle se v parametrični obliki glasi:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

Od tod sta parcialna odvoda

$$\vec{r}_u = (-a \cos v \sin u, a \cos v \cos u, 0) \text{ in } \vec{r}_v = (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, a \cos v)$$

ter njun vektorski produkt

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \cos v \sin u & a \cos v \cos u & 0 \\ -a \sin v \cos u & -a \sin v \sin u & a \cos v \end{vmatrix} = (a^2 \cos^2 v \cos u, a^2 \cos^2 v \sin u, a^2 \cos v \sin v)$$

Velikost tega vektorja je

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{(a^2 \cos^2 v \cos u)^2 + (a^2 \cos^2 v \sin u)^2 + (a^2 \cos v \sin v)^2} = \sqrt{a^4 \cos^2 v} = a^2 \cos v$$

Z uporabo formule (2.53) dobimo znano formulo za površino krogle:

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^2 \cos v du dv = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \Big|_0^{2\pi} \cos v dv = 2\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv = \\
&= 2\pi a^2 \sin v \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi a^2 (1 - (-1)) = 4\pi a^2
\end{aligned}$$

◆◆◆

## 2.2.3 Gaussov izrek

Gaussov izrek (ali tudi izrek Gauss-Ostrogradski) določa zvezo med trojnim integralom po danem prostorskem območju in ploskovnim integralom po sklenjeni ploskvi, ki določa to prostorsko območje.

Izrek o divergenci: Naj bo  $V$  zaprto prostorsko območje in  $P$  mejna ploskev tega območja. Naj bo nadalje  $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$  zvezna vektorska funkcija, prav tako naj bodo zvezni vsi njeni prvi odvodi,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  in  $\cos \gamma$  pa naj bodo smerni kosinusi vektorske enote  $\vec{n}$  na normali ploskve  $P$ , ki naj bo ves čas usmerjena ven iz območja  $V$ , torej naj kaže na zunanjo stran robne ploskve  $P$ .

Tedaj velja

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_P \vec{F} \vec{n} dP} \quad (2.54)$$

Formula (2.54) je Gaussova formula (ali tudi formula Ostrogradskega).

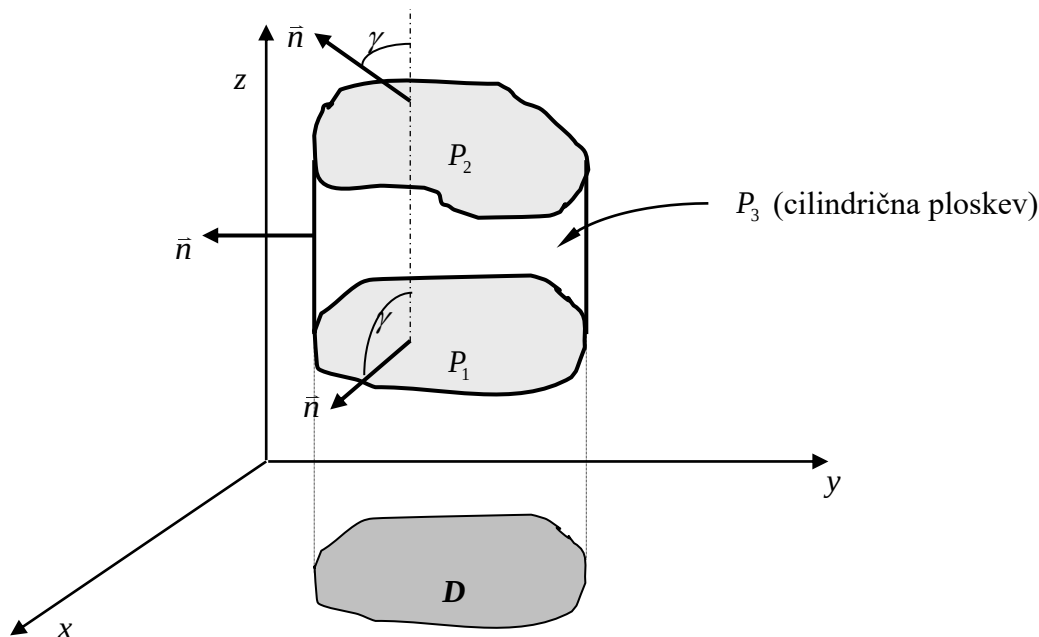
Formulo lahko zapišemo tudi s komponentami

$$\boxed{\iiint_V \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_P (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma) dP} \quad (2.55)$$

ali pa

$$\boxed{\iiint_V \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_P (F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy)} \quad (2.56)$$

Dokažimo ta izrek za enostavno prostorsko območje  $V$ , ki naj bo omejeno s tremi ploskvami: spodaj in zgoraj s ploskvama  $P_1$  ter  $P_2$  z enačbama  $z_1(x, y)$  in  $z_2(x, y)$ , ob strani pa s cilindrično ploskvijo  $P_3$  (slika 2.22). Obe ploskvi  $P_1$  ter  $P_2$  naj imata isto projekcijo na ravnino  $(x, y)$ , to je območje  $D$ , ki je kar projekcija telesa na ravnino  $(x, y)$ .


 Slika 2.22: Prostorsko območje  $V$ , omejeno s ploskvami  $P_1$ ,  $P_2$  in  $P_3$ 

Vzemimo trojni integral  $\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz$  in ga prevedimo na dvojnega tako, da integriramo po  $z$ . Zaradi dogovorjene oblike območja  $V$  dobimo

$$\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D (F_3(x, y, z_2) - F_3(x, y, z_1)) dx dy$$

oziroma

$$\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_D F_3(x, y, z_2) dx dy - \iint_D F_3(x, y, z_1) dx dy$$

Sedaj izračunajmo še ploskovni integral  $\iint_P F_3 dx dy$ , kjer je  $P$  celotna ploskev prostorskega območja  $V$ . Integriramo po zunanji strani te ploskve (normala kaže ven iz telesa). Normala na ploskvi  $P_1$  oklepa s smerjo  $z$  osi kot  $\gamma$ , ki je med  $\frac{\pi}{2}$  in  $\pi$ , zato je  $\cos \gamma < 0$ , normala na ploskvi  $P_2$  oklepa s smerjo  $z$  osi ostri kot, zato je tam  $\cos \gamma > 0$ , normala na ploskvi  $P_3$  pa oklepa  $z$  osjo  $z$  pravi kot, zato je tam  $\cos \gamma = 0$ . Če v (2.47), to je  $\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP = \iint_D (-F_1 p - F_2 q + F_3) dx dy$  in (2.52), to je  $\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP = \iint_P (F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy)$ , vzamemo  $\vec{F} = (0, 0, F_3)$  dobimo ploskovne integrale izražene z dvojnimi integrali, pri čemer je ploskovni integral po ploskvi  $P_1$  negativen, po ploskvi  $P_2$  pozitiven in po ploskvi  $P_3$  enak nič.

$$\begin{aligned}\iint_{P_1} F_3 dx dy &= - \iint_D F_3(x, y, z_1) dx dy \\ \iint_{P_2} F_3 dx dy &= + \iint_D F_3(x, y, z_2) dx dy \\ \iint_{P_3} F_3 dx dy &= 0\end{aligned}$$

Ker je

$$\iint_P F_3 dx dy = \iint_{P_1} F_3 dx dy + \iint_{P_2} F_3 dx dy + \iint_{P_3} F_3 dx dy$$

je potem tole res

$$\iint_P F_3 dx dy = + \iint_D F_3(x, y, z_2) dx dy - \iint_D F_3(x, y, z_1) dx dy$$

Malo pred tem smo ugotovili, da je tudi trojni integral  $\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz$  enak istemu izrazu, zato velja enakost

$$\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_P F_3 dx dy$$

Na podoben način (z izborom ustrezno enostavnega prostorskega območja in njegove projekcije še na ostali dve koordinatni ravnini) bi dobili potrditev še dveh izrazov

$$\iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz = \iint_P F_1 dy dz$$

$$\iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz = \iint_P F_2 dz dx$$

Ko vse tri izraze seštejemo, dobimo

$$\iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz + \iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz + \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_P F_1 dy dz + \iint_P F_2 dz dx + \iint_P F_3 dx dy$$

oziroma krajše

$$\iiint_V \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_P F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy$$

To pa je ravno Gaussova formula. S tem je izrek dokazan za enostavna prostorska področja v prostoru  $(x, y, z)$ , to so takšna, kjer vsaka vzporednica s posamezno koordinatno osjo prebode mejno ploskev največ dvakrat. Če prostorsko področje ni tako preprosto, pa ravnamo tako, da ga z odsekoma gladkimi ploskvami razdelimo na končno mnogo takih delov, da je vsak od njih enostavno prostorsko območje. Gaussovo formulo uporabimo na vsakem od njih, za celotno območje pa rezultate seštejemo.

Primer:

Z uporabo Gaussove formule izračunajmo ploskovni integral funkcije  $\vec{F} = (x^2z, x^2 + z^2, z^2x)$  po ploskvi  $P$ , dani s pogoji  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$  in  $z \geq 0$ .

Rešitev:

Po Gaussovi formuli (2.54) lahko ploskovni integral zapišemo s trojnim integralom takole

$$\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

V našem primeru je  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2xz + 2zx = 4xz$ .

Ploskovni integral je torej

$$\iint_P \vec{F} \cdot \vec{n} dP = \iiint_V 4xz dV$$

Prostorsko območje  $V$  je dano z istimi pogoji, kot ploskev  $P$ . Pogoj  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  predstavlja notranjost krogle s polmerom 1 in središčem v izhodišču prostorskega koordinatnega sistema, dodatna pogoja  $x \geq 0$  in  $z \geq 0$  pa določata četrtino te krogle.

Trojni integral  $\iiint_V 4xz dV$  bomo ugnali z uvedbo sfernih koordinat (1.37), to je

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta$$

$$y = r \cos \varphi \sin \vartheta$$

$$z = r \sin \varphi$$

V tem primeru bodo meje za nove koordinate naslednje:

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0, 1]$$

Zaradi  $4xz = 4r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta$  in  $J(r, \varphi, \vartheta) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = r^2 \cos \varphi$  dobimo

$$\iiint_V 4xz dV = 4 \iiint_{V^*} r^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos \vartheta d\varphi d\vartheta dr$$



Območje  $V^*$  je določeno s pogoji  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $r \in [0, 1]$ . Od tod dobimo

$$\begin{aligned} \iiint_V 4xz dV &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta d\vartheta \int_0^1 r^4 dr = \\ &= 4 \left( -\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (\sin \vartheta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

◆◆◆

## 2.2.4 Stokesov izrek

Stokesov<sup>4</sup> izrek povezuje krivuljni in ploskovni integral in definira njuno medsebojno povezavo. Povejmo Stokesov izrek brez dokaza<sup>5</sup>.

Naj bo  $P$  odsekoma gladka ploskev v prostoru in naj bo omejena z odsekoma gladko sklenjeno krivuljo  $C$ , ki lahko sestoji iz enega ali več delov. Krivulja  $C$  naj bo orientirana tako, da leži ploskev  $P$  ves čas na njeni levi strani, ko se pomikamo vzdolž krivulje v pozitivni smeri. Naj bosta še  $\vec{F}(x, y, z)$  zvezna vektorska funkcija (vektorsko polje), odvedljiva v točkah ploskve  $P$  ter  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  enotni vektor na normali ploskve  $P$ . Tedaj velja

$$\boxed{\iint_P (\operatorname{rot} \vec{F}) \vec{n} dP = \oint_C \vec{F} d\vec{r}} \quad (2.57)$$

Izraz (2.57) je Stokesova formula.

Ker je rotor vektorskega polja  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  po definiciji

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

lahko Stokesovo formulo zapišemo s komponentami takole

$$\boxed{\iint_P \left[ \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dP = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)} \quad (2.58)$$

<sup>4</sup> Sir George Gabriel STOKES (1819-1903), irski matematik in fizik.

<sup>5</sup> Dokaz si bralec lahko prebere npr. v knjigi Vidav: Višja matematika II, DZS, 1975, stran 413.

oziroma

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) N_1 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) N_2 + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) N_3 \right] dudv = \oint_{C^*} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) \quad (2.58a)$$

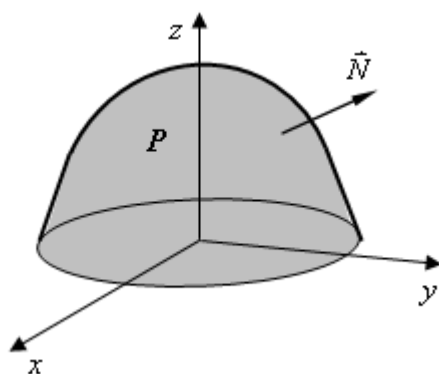
Tu je  $D$  območje na ravnini  $(u,v)$ ,  $C^*$  sklenjena ograja tega območja in  $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (N_1, N_2, N_3)$ . V izrazu na levi strani smo upoštevali še relacijo (2.45), to je  $\vec{n} dP = \vec{N} dudv$ .

Krivuljni integral vektorskega polja vzdolž sklenjene krivulje smo imenovali *cirkulacija polja*, ploskovni integral vektorskega polja po ploskvi  $P$  pa *pretok polja* skozi ploskev  $P$ . Zaradi tega lahko Stokesov izrek v primeru, ko sklenjena krivulja sestoji iz enega samega kosa, povemo z besedami takole:

*Cirkulacija vektorskega polja  $\vec{F}$  vzdolž sklenjene krivulje  $C$  je enaka pretoku rotorja tega polja skozi ploskev  $P$ , ki jo dana krivulja ograjuje.*

#### Primer:

Naj bo ploskev  $S$  v prostoru paraboloid (slika) z enačbo  $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$ , vektorsko polje pa naj bo dano takole  $\vec{F} = (y, z, x)$ . Preverimo Stokesov izrek.



#### Rešitev:

Sklenjena krivulja  $C$  je krožnica s polmerom 1 na ravnini  $(x, y)$ . Enačba krožnice v parametrični obliki je  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$ .

Tangentni vektor na krivuljo  $C$  je  $\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ .

Vektorsko polje na krivulji  $C$  je  $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\sin t, 0, \cos t)$ .

Desna stran v (2.75) je v tem primeru

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \dot{\vec{r}} dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt$$

Ker je  $I = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$  in je  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{2\pi} = \pi$ , dobimo

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \dot{\vec{r}} dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt = -\pi$$

Sedaj izračunajmo še levo stran Stokesove formule.

Vzeli bomo  $u = x, v = y$ , zato je  $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - u^2 - v^2$  in ploskev  $P$  je v vektorski obliki  $\vec{r} = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$ . Od tod sta oba parcialna odvoda  $\vec{r}_u = (1, 0, -2u)$ ,  $\vec{r}_v = (0, 1, -2v)$  in

$$\vec{N}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Zapišimo spet spremenljivke  $x, y$  in  $z$  in imamo normalo  $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$ . Vse tri komponente so pozitivne, zato bodo predznaki pozitivni.

Zaradi  $\vec{F} = (y, z, x)$  je

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

in

$$\text{rot} \vec{F} \cdot \vec{N} = (-1, -1, -1) \cdot (2x, 2y, 1) = -2x - 2y - 1$$

Leva stran se torej glasi

$$\iint_P (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} dP = \iint_D (-2x - 2y - 1) dx dy$$

Območje  $D$  je krožnica s polmerom 1 na ravnini  $(x, y)$ , zato bomo dvojni integral rešili z uvedbo polarnih koordinat:  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]$ , Jacobijeva determinanta je  $J = r$  in dvojni integral se poenostavi

$$\begin{aligned}
\iint_D (-2x - 2y - 1) dx dy &= \iint_{D^*} (-2r \cos \varphi - 2r \sin \varphi - 1) r dr d\varphi = \\
&= - \int_0^1 \left[ \int_0^{2\pi} (2r \cos \varphi + 2r \sin \varphi + 1) d\varphi \right] r dr = \\
&= - \int_0^1 2\pi r dr = - \frac{2\pi r^2}{2} \Big|_0^1 = -\pi
\end{aligned}$$

Desna stran je res enaka levi. Seveda smo pri tem upoštevali pravilno orientacijo tako pri ploskovnem kot pri krivuljnem integralu. Sklenjena krivulja  $C$  je bila orientirana pozitivno (v nasprotni smeri urinega kazalca) in ploskev  $P$  je ves čas na njeni levi strani. Normala na ploskev je zato orientirana pozitivno in usmerjena v zunanost paraboloida.

◆◆◆

# III

## INTEGRALSKE TRANSFORMACIJE

## 3.1 FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

### 3.1.1 Definicija Fourierove transformacije

Naj bo  $f(t)$  realna funkcija neodvisne spremenljivke  $t$  z definicijskim območjem na celi realni osi  $(-\infty, +\infty)$ .

Opomba: Neodvisna spremenljivka  $t$  v konkretnih primerih, ki jih srečamo v tehniki, običajno pomeni čas.

Zahtevajmo, da naj ima realna funkcija  $f(t)$  samo končno mnogo singularnih\* točk (\*glej npr. <http://mathworld.wolfram.com/SingularPoint.html>) in v teh točkah samo končno velike skoke.

Definicija: Funkcijo

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.01)$$

imenujemo **Fourierov transform** funkcije  $f(t)$ , pri čemer je  $i$  imaginarna enota ( $i^2 = -1$ ),  $\omega$  pa je neka realna spremenljivko, ki jo imenujemo frekvenca. Integral v (3.01) mora na intervalu  $(-\infty, +\infty)$  seveda eksistirati, za funkcijo  $f(t)$  pa zahtevamo, da je absolutno integrabilna, torej mora biti izpolnjen pogoj

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3.02)$$

Vse realne (časovne) funkcije  $f(t)$  sestavljajo realni (časovni) prostor, ustrezni Fourierovi transformi  $F(\omega)$  pa sestavljajo kompleksni frekvenčni prostor.

Transformacija (3.01) torej preslika funkcijo iz realnega časovnega prostora v kompleksni frekvenčni prostor.

Za Fourierov transform  $F(\omega)$  običajno uporabljamo znak:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (3.03)$$

V (3.03) je  $\mathcal{F}$  Fourierov operator, ki preslika realno časovno funkcijo  $f(t)$  v kompleksno frekvenčno funkcijo  $F(\omega)$ , torej

$$\mathcal{F}: f(t) \rightarrow F(\omega)$$

Enačbo (3.01) potem zapišemo tudi takole:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.04)$$

Fourierova transformacija je bijektivna, to pomeni, da obstaja tudi **inverzna Fourierova transformacija**  $\mathcal{F}^{-1}$ , ki transform  $F(\omega)$  preslika v časovno funkcijo  $f(t)$ :

$$\mathcal{F}^{-1}: F(\omega) \rightarrow f(t)$$

Inverzno Fourierovo transformacijo dobimo iz (3.01) z inverzno formulo:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.05)$$

Ko je funkcija  $f(t)$  znana in jo analiziramo v časovnem prostoru, govorimo o *valovni obliki funkcije (signala)*, ker je iz nje jasno razvidno, kako so amplitude razporejene v času. Ko je dani signal  $F(\omega)$  v frekvenčnem prostoru, pa govorimo o *spektralni gostoti* signala, ker je iz njega jasno razvidno, kako so amplitude razporejene po frekvencah.

### 3.1.2 Lastnosti Fourierove transformacije

Za Fourierovo transformacijo je mogoče izpeljati nekatere lastnosti (pravila), s katerimi si olajšamo računske postopke. Navedimo jih brez dokazov.

#### 1. Linearnost

Fourierova transformacija linearne kombinacije zveznih realnih funkcij je linearna kombinacija Fourierovih transformacij posameznih funkcij.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t)\} = \\ = \alpha_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\} + \dots + \alpha_n \mathcal{F}\{f_n(t)\}\end{aligned}\quad (3.06)$$

Formulo (3.06) dobimo iz (3.01) oz. (3.04), pri čemer upoštevamo, da je integriranje linearna operacija.

Na podoben način ugotovimo še, da tudi za inverzno Fourierovo transformacijo velja lastnost linearnosti, to je:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega) + \dots + \alpha_n F_n(\omega)\} = \\ = \alpha_1 \mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega)\} + \alpha_2 \mathcal{F}^{-1}\{F_2(\omega)\} + \dots + \alpha_n \mathcal{F}^{-1}\{F_n(\omega)\}\end{aligned}\quad (3.07)$$

## 2. Konvolucija

Zapis

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (3.08)$$

imenujemo *konvolucija* ali *konvolucijski integral funkcij*  $f_1(t)$  in  $f_2(t)$ .

Fourierova transformacija konvolucije dveh funkcij v časovnem prostoru je enaka produktu obeh pripadajočih transformiranih funkcij v frekvenčnem prostoru:

$$\mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (3.09)$$

Podobno je inverzna Fourierova transformacija konvolucije dveh funkcij (Fourierovih transformov) v frekvenčnem prostoru enaka produktu osnovnih funkcij v časovnem prostoru:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(\omega - i\xi) d\xi\right\} = f_1(t) f_2(t) \quad (3.10)$$

## 3. Pomik

Pod tem pojmom ločimo dve možnosti – časovni pomik  $f(t - t_0)$  in frekvenčni pomik  $f(\omega - \omega_0)$ . Za Fourierovi transformaciji teh funkcij veljata naslednji lastnosti:



3.1. Časovni pomik

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t} dt = F(\omega)e^{-i\omega t_0} \quad (3.11)$$

V (3.11) pomeni  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ .

3.2 Frekvenčni pomik

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega-\omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-\omega_0)e^{i\omega t} d\omega = f(t)e^{i\omega_0 t} \quad (3.12)$$

V (3.12) pomeni  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ .

4. Razteg

$$\mathcal{F}[f(\lambda t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{\omega}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0 \quad (3.13)$$

Lastnost (3.13) ima pomembno vlogo v teoriji signalov, ker sprememba trajanja neke časovne funkcije daje enako obliko transforma, spremenita se samo velikost in frekvenca. V konkretnem primeru to pomeni naslednje: čim krajši je časovni interval, tem večji je frekvenčni obseg in obratno.

5. Množenje z eksponentno funkcijo

$$\mathcal{F}[e^{i\lambda t} f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)e^{-i\omega t} dt = F(\omega - \lambda) \quad (3.14)$$

6. Transformacija odvoda

Za odvode  $f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$  in  $F^{(n)}(\omega) = \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$  veljata pomembni praktični lastnosti.

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F(\omega) \quad (3.15)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F^{(n)}(\omega)\} = (-i\omega)^n f(t) \quad (3.16)$$

### 7. Transformacija integrala

Za Fourierovo transformacijo integrala  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$  velja naslednja lastnost

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(\omega)}{i\omega} \quad (3.17)$$

Če v (3.17) upoštevamo, da velja  $\frac{1}{i} = -i$ , dobimo

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = -i \cdot \frac{F(\omega)}{\omega} \quad (3.17a)$$

### 7. Križna korelacija in spektralna gostota

Križna korelacija funkcij  $f_1(t)$  in  $f_2(t)$  je tale izraz

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau \quad (3.18)$$

Fourierova transformacija križne korelacije (3.18) pa je *spektralna gostota*

$$\Phi_{12}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{12}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau) e^{-i\omega t} dt \quad (3.19)$$

Označimo  $\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$  in  $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$ . Z znakom  $F_1^*(\omega)$  označimo konjugirano kompleksno vrednost funkcije  $F_1(\omega)$ .

Za spektralno gostoto (3.19) velja relacija:

$$\Phi_{12}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{12}(t)\} = F_1^*(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (3.20)$$

## 8. Avtokorelacija in spektralna gostota avtokorelacije

Avtokorelacija funkcije  $f_1(t)$  je definirana z integralom:

$$R_{11}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_1(t + \tau) d\tau \quad (3.21)$$

Fourierova transformacija avtokorelacije se imenuje *spektralna gostota* avtokorelacije in je določena z izrazom:

$$\Phi_{11}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{11}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(\tau) f_1(t + \tau) d\tau) e^{-i\omega t} dt \quad (3.22)$$

Za spektralno gostoto avtokorelacije velja naslednja relacija:

$$\Phi_{11}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{11}(t)\} = F_1^*(\omega) F_1(\omega) = (F_1(\omega))^2 \quad (3.23)$$

V nadaljevanju spoznajmo dve posebni funkciji, ki v konkretnih praktičnih primerih zelo pogosto nastopata. To sta enotina stopnična (ali tudi: skočna) funkcija in enotina impulzna funkcija.

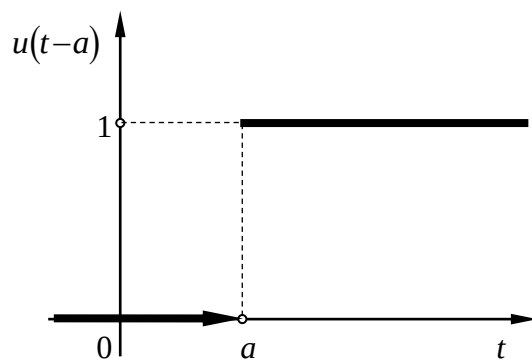
### 3.1.3 Enotina stopnična (skočna) funkcija

Enotina stopnična (ali tudi: skočna) funkcija<sup>6</sup>  $u(t-a)$  (angl.: *Unit step function*) je za vsako pozitivno število ( $a \geq 0$ ) definirana s pravilom:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < a \\ 1 & \text{za } t \geq a \end{cases} \quad (3.24)$$

Funkcija (3.24) je za vse  $t < a$  enaka nič (leži na abscisni osi), v  $t = a$  pa naredi skok višine ene enote in je nato konstantna v tej višini (slika 3.01).

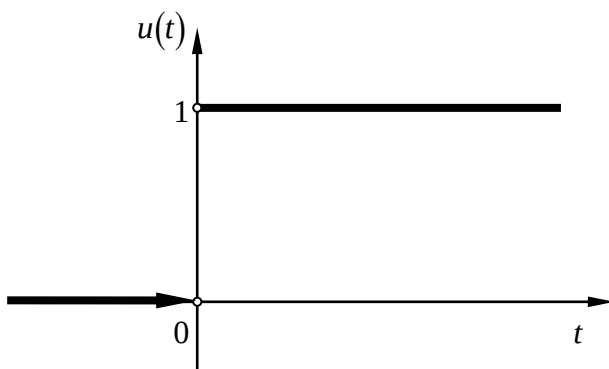
<sup>6</sup> Imenovana tudi Heavisideova funkcija; Oliver Heaviside (1850-1925), angleški matematik in fizik.

Slika 3.01: Enotina stopnična funkcija  $u(t-a)$ 

Kadar je  $a=0$ , ima enotina stopnična funkcija skok v točki  $t=0$  (slika 3.02).

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ 1 & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

(3.24a)

Slika 3.02: Enotina stopnična funkcija  $u(t)$ 

Enotina stopnična funkcija je uporabna v inženirskih aplikacijah in ima pomen v primerih, ko je potrebno vklopiti ali izklopiti funkcijo  $f(t)$ , ki opisuje neko dogajanje. Če to funkcijo pomnožimo z enotino stopnično funkcijo  $u(t-a)$ , lahko s tem dosežemo ponazoritev raznih konkretnih in realnih možnosti.

### 3.1.4 Enotina impulzna funkcija

Enotina impulzna funkcija ali *Diracova*<sup>7</sup>  $\delta$ -funkcija je določena z izrazom:

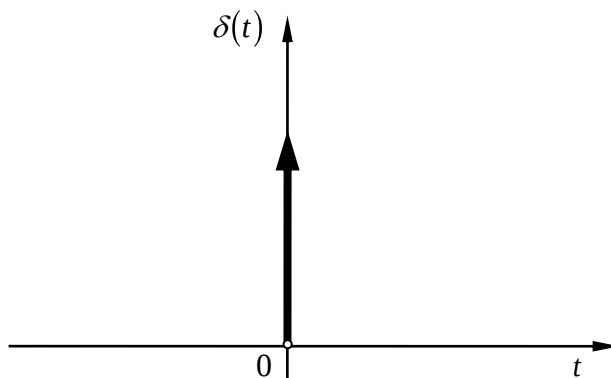
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (3.25)$$

Enotina impulzna funkcija ima dve pomembni lastnosti:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Enotin impulz je za vse vrednosti neodvisne spremenljivke, razen za  $t = 0$ , enak nič, njegova ploščina pa je enaka enoti. To funkcijo si zato grafično predstavljamo kot puščico, ki ima zelo majhno (»skoraj nič«) širino, neskončno veliko višino in ploščino enako 1 (slika 3.03).



Slika 3.03: Enotina impulzna funkcija

*Splošni impulz*  $v(t)$  pa je določen z izrazom:

$$v(t) = \alpha \delta(t) \quad (3.25a)$$

V (3.25a) je količina  $\alpha$  *jakost* impulza in predstavlja njegovo ploščino:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \delta(t) dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

<sup>7</sup> Paul Adrien Maurice Dirac, (1902 – 1984), angleški teoretični fizik, raziskoval kvantno mehaniko in kvantno elektrodinamiko, skupaj z Erwinom [Schrödinger](#)jem je leta 1933 prejel Nobelovo nagrado za fiziko.

Primer:

Izračunajmo Fourierov transform funkcije  $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ ,  $\alpha > 0$

Rešitev:

Fourierov transform bomo izračunali po definiciji (3.04)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-\alpha t^2}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha t^2 + i\omega t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha} \cdot t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dt = \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha} \cdot t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cdot I\end{aligned}$$

Rešimo integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha} \cdot t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dt$$

s substitucijo  $u = \sqrt{\alpha} \cdot t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}} \Rightarrow du = \sqrt{\alpha} \cdot dt$ .

Meji integrala ostaneta enaki tudi za spremenljivko  $u$  in integral  $I$  zapišemo v obliki

$$I = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Ta integral rešimo z naslednjo zvijačo: integral kvadrirajmo in ga spremenimo v dvojni integral.

$$I = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \Rightarrow I^2 = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv$$

V zgornji integral vpeljemo polarni koordinati  $u = r \cos \varphi$ ,  $v = r \sin \varphi$ .

Od tod je  $\sqrt{u^2 + v^2} = r$ ,  $du dv = r dr d\varphi$ .

Meji za novi spremenljivki sta:  $r \in [0, \infty]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  in integral se sedaj glasi

$$\begin{aligned}I^2 &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \\ &= \frac{2\pi}{\alpha} \left( -\frac{e^{-r^2}}{2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\end{aligned}$$

Od tod pa že dobimo iskani Fourierov transform:

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t^2}] = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cdot I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

◆◆◆

### 3.1.5 Tabela nekaterih Fourierovih transformov in računanje z njimi

Fourierovi transformi za konkretne funkcije, ki se v praksi pojavljajo, so seveda že izračunani. Nekatere (najpogostejše uporabljane) zapišimo v spodnjo tabelo.

| $f(t)$                                                            | $F(\omega)$                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\delta(t)$                                                       | 1                                                                                                                 |
| 1                                                                 | $2\pi \delta(\omega)$                                                                                             |
| $u(t)$                                                            | $\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$                                                                          |
| $\sin \omega_0 t$                                                 | $\pi \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)$                                                       |
| $\cos \omega_0 t$                                                 | $\pi \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$                                                       |
| $u(t) \sin \omega_0 t$                                            | $\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2i} \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$ |
| $u(t) \cos \omega_0 t$                                            | $\frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$     |
| $u(t) e^{-\frac{t}{\tau}}$                                        | $\frac{\tau}{1 + i\omega\tau}$                                                                                    |
| $u(t) t e^{-\frac{t}{\tau}}$                                      | $\frac{\tau^2}{(1 + i\omega\tau)^2}$                                                                              |
| $u(t) \frac{t^k}{k!} e^{-\frac{t}{\tau}}$                         | $\frac{\tau^{k+1}}{(1 + i\omega\tau)^{k+1}}$                                                                      |
| $u(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$                       | $\frac{1}{i\omega(1 + i\omega\tau)}$                                                                              |
| $u(t) \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$ | $\frac{\tau_1 - \tau_2}{(1 + i\omega\tau_1)(1 + i\omega\tau_2)}$                                                  |
| $u(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega_0 t$                        | $\frac{\omega_0 \tau^2}{(1 + i\omega\tau)^2 + (\omega_0 \tau)^2}$                                                 |
| $u(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_0 t$                        | $\frac{\tau(1 + i\omega\tau)}{(1 + i\omega\tau)^2 + (\omega_0 \tau)^2}$                                           |

Iz lastnosti Fourierove transformacije vidimo, da je računanje s Fourierovimi transformi v kompleksnem frekvenčnem območju precej enostavnejše kot s funkcijami v realnem časovnem območju. Zato veliko problemov rešimo tako, da časovne funkcije transformiramo v frekvenčno območje in tam izvedemo zahtevane računske operacije. Na ta način dobimo rezultat, ki je seveda neka kompleksna funkcija v frekvenčnem območju, zato jo z inverzno

Fourierovo transformacijo preslikamo v realno (časovno) območje. Tega praviloma ne počnemo z uporabo formule (3.05), pač pa le uporabimo tabelo Fourierovih transformov.

Če je dobljena funkcija  $F(\omega)$  takšna, da je ne najdemo v tabeli, si lahko pomagamo tako, da jo zapišemo kot vsoto enostavnejših izrazov – takšnih, ki jih najdemo v tabeli.

V praktičnih primerih pridemo do izrazov, zapisanih v obliki racionalne funkcije:

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{a_n(i\omega)^n + \dots + a_1(i\omega) + a_0}{b_m(i\omega)^m + \dots + b_1(i\omega) + b_0}$$

Ker se imenovalc vedno lahko razstavi na produkt linearnih členov, lahko takšne funkcije zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov.

$$\begin{aligned} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} &= \frac{a_n(i\omega)^n + \dots + a_1(i\omega) + a_0}{b_m(i\omega - p_1)(i\omega - p_2) \cdots (i\omega - p_m)} = \\ &= \frac{A}{(i\omega - p_1)} + \frac{B}{(i\omega - p_2)} + \dots + \frac{M}{(i\omega - p_m)} \end{aligned}$$

Iz tega izraza na enega od več možnih načinov izračunamo neznana števila v števcih parcialnih ulomkov, tako da je funkcija  $F(\omega)$  vsota takšnih izrazov, ki so zagotovo v tabeli.

Primer:

Funkcijo  $F(\omega) = \frac{(i\omega)^2 + 5(i\omega) + 2}{(i\omega)^3 + 3(i\omega)^2 + 4(i\omega) + 2}$  moremo zapisati v obliki

$$F(\omega) = \frac{A}{i\omega + 1} + \frac{B}{i\omega + 1 - i} + \frac{C}{i\omega + 1 + i}$$

Izračunamo števce, npr. tako, da gornji izraz pomnožimo z najmanjšim skupnim imenovalcem, uredimo in primerjamo koeficiente pri enakih potencah  $\omega$  na levi in desni strani enačbe. Z nekoliko računanja dobimo:

$$A = -2, \quad B = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}, \quad C = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Zaradi lastnosti Fourierove transformacije je

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-2}{i\omega + 1} + \frac{1,5\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}}{i\omega + 1 - i} + \frac{1,5\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}}{i\omega + 1 + i} \right\} =$$



$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{-2}{i\omega+1} \right\} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1,5\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}}{i\omega+1-i} \right\} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1,5\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}}{i\omega+1+i} \right\} = \\
&= -2e^{-t} + \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{(-1+i)t} + \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{(-1-i)t} = e^{-t} \left( -2 + 3\sqrt{2} \cos \left( t - \frac{\pi}{4} \right) \right)
\end{aligned}$$

◆◆◆

## 3.2 LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

### 3.2.1 Definicija Laplaceove transformacije

Iz prejšnjega poglavja vemo, da mora vsaka realna funkcija  $f(t)$ , za katero želimo tvoriti Fourierov transform (3.01), zadoščati pogoju (3.02), ki zahteva konvergentnost integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

V inženirski praksi pa imamo opraviti tudi s funkcijami (npr. periodične, hitro naraščajoče funkcije), ki temu pogoju ne zadoščajo. Razred transformabilnih funkcij lahko bistveno povečamo, če dopustimo konvergenco glede na nek eksponentni faktor. Na osnovi takšne zamisli pridemo do Laplaceove transformacije, ki jo torej lahko pojmuje kot razširitev Fourierove transformacije.

Laplaceova transformacija je definirana samo za funkcije  $f(t)$ , ki so za  $t < 0$  enake nič. Na osnovi tega pogoja in z uvedbo faktorja konvergence  $e^{-\sigma t}$  dobimo pogoj konvergence, ki mu mora funkcija ustrezati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty, \sigma \in \mathbf{R} \quad (3.26)$$

Največja spodnja meja iz množice števil  $\sigma$ , za katero je integral (3.26) še konvergenten, se imenuje *abscisa absolutne konvergence* in jo označimo z znakom  $\sigma_a$ . Velja torej:  $\sigma_a < \sigma < \infty$ .

**Definicija:** Naj bo  $f(t)$  realna funkcija, ki je za  $t < 0$  enaka nič, za  $t \geq 0$  pa odsekoma gladka in s končnim številom singularnih točk (točk nezveznosti). Funkcija  $f(t)$  naj tudi zadošča pogoju absolutne konvergence (3.26) za  $\sigma_a < \sigma < \infty$ . Funkcijo

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + i\omega \in C \quad (3.27)$$

imenujemo **Laplaceov transform** funkcije  $f(t)$ , če ta integral obstaja za vsa kompleksna števila  $s$  iz nekega danega in znanega področja v kompleksni ravnini. Operacija, ki realni funkciji  $f(t)$ , definirani za  $t \geq 0$ , priredi Laplaceov transform  $F(s)$ , se imenuje **Laplaceova transformacija**. Laplaceova transformacija pomeni preslikavanje realne funkcije  $f(t)$  iz realnega (časovnega) območja v kompleksno ravnino.

Za Laplaceov transform  $F(s)$  uporabljamo znak:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (3.28)$$

$\mathcal{L}$  je Laplaceov operator, ki preslika funkcijo  $f(t)$  v funkcijo  $F(s)$ , torej

$$\mathcal{L}: f(t) \rightarrow F(s)$$

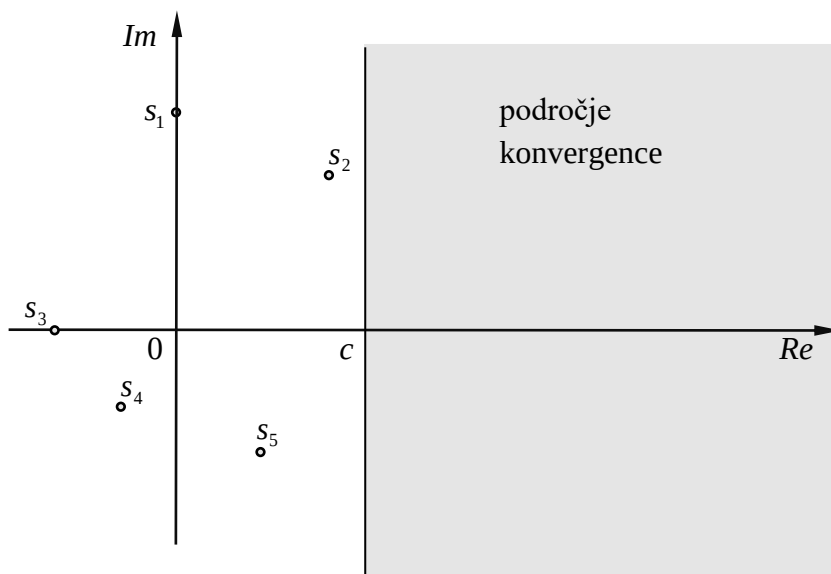
Laplaceova transformacija je bijektivna, tako da obstaja tudi inverzna Laplaceova transformacija, s katero izračunamo realno funkcijo iz njenega Laplaceovega transforma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} F(s) e^{st} ds, \quad c > \sigma_a \quad (3.29)$$

Inverzna Laplaceova transformacija  $\mathcal{L}^{-1}$  preslika transform  $F(s)$  iz kompleksne  $s$ -ravnine nazaj v realno območje:  $\mathcal{L}^{-1}: F(s) \rightarrow f(t)$ . To običajno pišemo v tej obliki:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (3.30)$$

Integral (3.29) računamo vzdolž premice  $\sigma = c$ , ki smo jo dobili tako, da ležijo vse singularnosti, torej vsi poli funkcije  $F(s)$  na levi strani te premice. Področje konvergence je tisti del kompleksne ravnine, kjer ni polov Laplaceovega transforma  $F(s)$  (slika 3.04).



Slika 3.04: Področje konvergence Laplaceove transformacije

### 3.2.2 Lastnosti Laplaceove transformacije

Lastnosti Laplaceove transformacije dobimo iz definicije (3.27).

#### 1. Linearnost

Laplaceovo transformacijo in inverzno Laplaceovo transformacijo odlikuje lastnost linearnosti.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + \dots + k_n f_n(t)\} &= k_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} + \dots + k_n \mathcal{L}\{f_n(t)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + \dots + k_n f_n(t)\} &= k_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(t)\} + \dots + k_n \mathcal{L}^{-1}\{f_n(t)\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

V obeh zgornjih izrazih so koeficienti  $k_1, k_2, \dots, k_n$  poljubna od nič različna realna števila.

#### Dokaz:

Lastnost (3.31) dobimo direktno iz definicije Laplaceove transformacije (3.27). Upoštevati moramo le lastnosti integriranja.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + \dots + k_n f_n(t)\} &= \int_0^{\infty} [k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + \dots + k_n f_n(t)] e^{-st} dt = \\
&= \int_0^{\infty} [k_1 f_1(t)] e^{-st} dt + \int_0^{\infty} [k_2 f_2(t)] e^{-st} dt + \dots + \int_0^{\infty} [k_n f_n(t)] e^{-st} dt = \\
&= k_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + k_2 \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt + \dots + k_n \int_0^{\infty} f_n(t) e^{-st} dt = \\
&= k_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} + \dots + k_n \mathcal{L}\{f_n(t)\}
\end{aligned}$$

Podobno bi zgornjo lastnost potrdili tudi za inverzno Laplaceovo transformacijo.

## 2. Konvolucija

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right\} &= \mathcal{L}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_1(s) F_2(s) \\
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F_1(p) F_2(s-p) dp\right) &= (f_1 * f_2)(t)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Pravilo za Laplaceovo transformacijo konvolucije dobimo takole: konvolucijo dveh funkcij  $f_1(t)$  in  $f_2(t)$ , označimo jo z  $f(t)$ , smo zapisali kot integral

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Za funkciji  $f_1(t)$  in  $f_2(t)$ , ki pa sta za enaki nič za vse  $t < 0$ , pa je konvolucija takšna funkcija:  $f(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$

Po definiciji Laplaceove transformacije je potem tole res ( $0 \leq \tau \leq t$ )

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right\} = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-st} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt$$

Zamenjajmo vrstni red integriranja  $F(s) = \int_{\tau=0}^t \int_{t=\tau}^{\infty} e^{-st} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt d\tau$  in uvedimo novo spremenljivko  $u = t - \tau \Rightarrow du = dt$ . Meje integriranja so sedaj  $\tau \in [0, \infty)$ ,  $u \in [0, \infty)$ . Na ta način dobimo

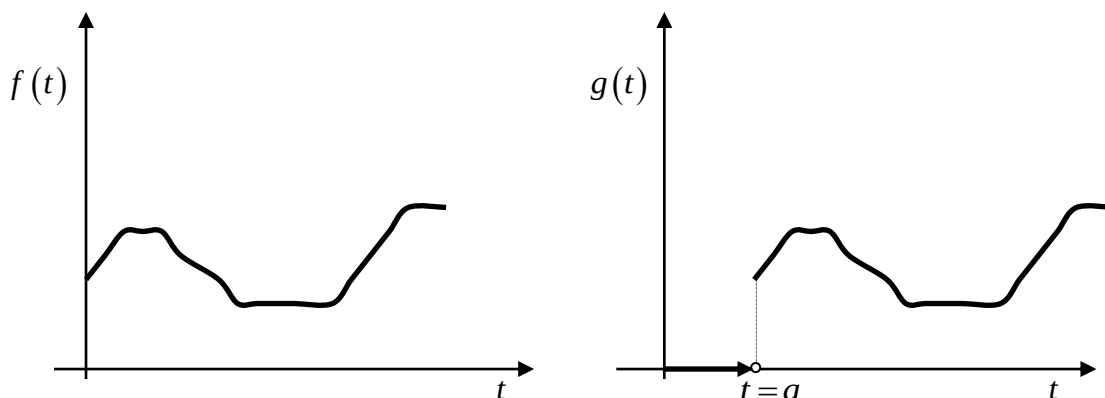
$$F(s) = \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} e^{-s(u+\tau)} f_1(\tau) f_2(u) du d\tau = \left(\int_0^{\infty} e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau\right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-su} f_2(u) du\right) = \mathcal{L}\{f_1\} \cdot \mathcal{L}\{f_2\} = F_1(s) F_2(s)$$

### 3. Paralelni premik (časovni zamik)

Naj bo funkcija  $g$  določena kot časovni zaostanek funkcije  $f$ , naj torej velja

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ f(t-a) & t \geq a \end{cases}$$

To pomeni, da sta funkciji  $f$  in  $g$  identični, vendar z zamikom  $a$  (slika 3.05).



Slika 3.05: Paralelni premik

$$\text{Tedaj je } \mathcal{L}\{f(t-a)\} = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(a+\tau)}d\tau = e^{-as}\mathcal{L}\{f(\tau)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}} \quad (3.33)$$

### 4. Produkt funkcije z eksponentno funkcijo

Naj bosta dana funkcija  $f(t)$  in skalar  $a$ . Za funkcijo  $g(t) = e^{at}f(t)$  dobimo Laplaceov

$$\text{transform po definiciji : } \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a).$$

Ugotovili smo pravilo

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)} \quad (3.34)$$

### 5. Produkt funkcije s potenco

V enačbi (3.27), to je  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ , obe strani zaporedoma odvajajmo po  $s$  in dobimo

$$F'(s) = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt$$

$$F''(s) = (-1)^2 \int_0^{\infty} t^2 f(t) e^{-st} dt$$

$$F'''(s) = (-1)^3 \int_0^{\infty} t^3 f(t) e^{-st} dt$$

...

Splošno lahko zapišemo

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n f(t) e^{-st} dt, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.35)$$

Iz formule (3.35) vidimo tudi pravilo za računanje Laplaceove transformacije funkcije, pomnožene s potenco

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36)$$

Opomba: Namesto  $F^{(n)}(s) = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$  včasih pišemo tudi

$$F^{(n)}(s) = \frac{d^n \mathcal{L}\{f(t)\}}{ds^n}$$

### 6. Laplaceova transformacija odvoda funkcije

Laplaceov transform prvega odvoda dobimo tako, da integral v definiciji (3.27) rešujemo z metodo per partes ( $u = f(t) \rightarrow du = f'(t)dt$  in  $dv = e^{-st} dt \rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$ ).

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \cdot f(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{e^{-st}}{s} \right) f'(t) dt = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

V tem zapisu upoštevajmo, da je  $\int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f'(t)\}$  in dobimo

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f'(t)\}$$

Od tod pa že sledi formula za Laplaceov transform prvega odvoda

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (3.37)$$

*Opomba:* Odvod funkcije po spremenljivki  $t$  označimo tudi s piko s piko, torej  $f'(t) \equiv \dot{f}(t)$ . Podobno velja tudi za višje odvode.

Sedaj v enačbi  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$  računajmo integral na desni strani spet po metodi per partes ( $u = f'(t) \rightarrow du = f''(t)dt$  in  $dv = e^{-st} dt \rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$ ).

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} f'(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{e^{-st}}{s} \right) f''(t) dt = \frac{f'(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f''(t)e^{-st} dt$$

Upoštevajmo, da je  $\int_0^{\infty} f''(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f''(t)\}$  in dobimo enačbo

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{f'(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f''(t)\}$$

V tem izrazu na levi strani uporabimo še (3.37), uredimo in dobimo formulo za Laplaceov transform drugega odvoda

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \quad (3.38)$$

Na podoben način dobimo Laplaceov transform tretjega odvoda

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 \mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \quad (3.39)$$

Splošno velja

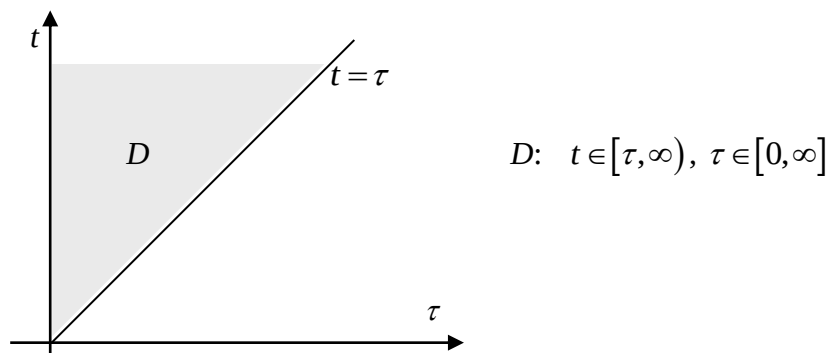
$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (3.40)$$

## 7. Laplaceova transformacija integrala

Naj bo  $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ . Po definiciji (3.27) je njen Laplaceov transform

$$G(s) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt = \int_{t=0}^\infty \int_{\tau=0}^t f(\tau) e^{-st} d\tau dt$$

Ker je  $0 \leq \tau \leq t$ , je treba integrirati zgornji dvojni integral po območju, ki ga vidimo na spodnji sliki (enačba premice je  $t = \tau$ ).



Integrirajmo najprej v navpični in nato v vodoravni smeri območja  $D$ :

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_{t=0}^\infty \int_{\tau=0}^t f(\tau) e^{-st} d\tau dt = \int_{\tau=0}^\infty f(\tau) \left( \int_{t=\tau}^\infty e^{-st} dt \right) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_{t=\tau}^\infty d\tau = \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)} \quad (3.41)$$

## 8. Izrek o začetni vrednosti:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s))} \quad (3.42)$$

## 9. Izrek o skrajni vrednosti:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))} \quad (3.43)$$



### 3.2.3 Tabela nekaterih Laplaceovih transformov

| $f(t)$                                                                                       | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\delta(t)$                                                                                  | 1                                             |
| $\delta(t - kT)$                                                                             | $e^{-kTs}$                                    |
| $u(t)$                                                                                       | $\frac{1}{s}$                                 |
| $t$                                                                                          | $\frac{1}{s^2}$                               |
| $t^2$                                                                                        | $\frac{2!}{s^3}$                              |
| $t^n, n = 0, 1, 2, \dots$                                                                    | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                          |
| $e^{-\alpha t}$                                                                              | $\frac{1}{s + \alpha}$                        |
| $t e^{-\alpha t}$                                                                            | $\frac{1}{(s + \alpha)^2}$                    |
| $\frac{t^n e^{-\alpha t}}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$                                           | $\frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$                |
| $1 - e^{-\alpha t}$                                                                          | $\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$                |
| $t - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$                                                       | $\frac{\alpha}{s^2(s + \alpha)}$              |
| $\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \quad (\alpha \neq \beta)$              | $\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$           |
| $\frac{\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \quad (\alpha \neq \beta)$ | $\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$           |
| $\sin kt$                                                                                    | $\frac{k}{s^2 + k^2}$                         |
| $\cos kt$                                                                                    | $\frac{s}{s^2 + k^2}$                         |
| $\frac{1}{t} \cdot \sin kt$                                                                  | $\arctg \frac{k}{s}$                          |
| $\frac{1}{t} \cdot (1 - \cos kt)$                                                            | $\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{s^2 + k^2}{s^2}$ |
| $e^{-\alpha t} \sin kt$                                                                      | $\frac{k}{(s + \alpha)^2 + k^2}$              |
| $e^{-\alpha t} \cos kt$                                                                      | $\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + k^2}$     |

|                                                                                                                         |                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1 - \cos kt$                                                                                                           | $\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$                                                                    |
| $kt - \sin kt$                                                                                                          | $\frac{k^3}{s^2(s^2 + k^2)}$                                                                  |
| $t \cdot \sin kt$                                                                                                       | $\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$                                                                   |
| $\sin kt - kt \cos kt$                                                                                                  | $\frac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}$                                                                  |
| $\sin kt + kt \cos kt$                                                                                                  | $\frac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2}$                                                                 |
| $\cos \alpha t - \cos \beta t$                                                                                          | $\frac{(\beta^2 - \alpha^2)s}{(s^2 + \alpha^2)(s^2 + \beta^2)} \quad (\alpha^2 \neq \beta^2)$ |
| $(c - \alpha)e^{-\alpha t} + (\beta - c)e^{-\beta t}$                                                                   | $\frac{(\beta - \alpha)(s + c)}{(s + \alpha)(s + \beta)}$                                     |
| $1 - \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \quad (\alpha \neq \beta)$ | $\frac{\alpha \beta}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$                                               |
| $\sinh \alpha t$                                                                                                        | $\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$                                                               |
| $\cosh \alpha t$                                                                                                        | $\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$                                                                    |

### 3.2.4 Računanje z Laplaceovo transformacijo in njena uporaba

Za računanje Laplaceovih transformov in njihovih inverzumov uporabljamo tabelo, v kateri so transformi za funkcije, ki se najpogosteje pojavljajo v praksi, že izračunani.

Laplaceovi transformi, ki jih srečujemo v praksi, so izključno racionalne funkcije kompleksne spremenljivke  $s$  in jih lahko zapišemo v splošni obliki kot kvocient dveh polinomov:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0} \quad n < m \quad (3.44)$$

V zapisu (3.44) smo privzeli, da je stopnja polinoma v imenovalcu višja od stopnje polinoma v števcu. Če bi bila stopnja polinoma v števcu višja od stopnje polinoma v imenovalcu, bi

lahko števec delili z imenovalcem in dobili polinom in ostanek oblike (3.44), kjer bi bil pogoj  $n < m$  zagotovo izpolnjen.

Iz Laplaceovega transformata  $F(s)$  dobimo pripadajočo realno funkcijo  $f(t)$  z inverzno Laplaceovo transformacijo. Če inverzuma za (3.44) ne najdemo v tabeli, potem je potrebno ta izraz zapisati kot vsoto parcialnih ulomkov. Imenovalec lahko vedno razstavimo na produkt linearnih izrazov, kjer so nekateri koreni (to so za racionalno funkcijo *poli*) lahko tudi večkratni. Vzemimo, da funkcijo  $F(s)$  uspemo zapisati takole:

$$F(s) = \frac{R(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_i)^r\cdots(s+s_n)}$$

Ta izraz zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov, pri čemer je potrebno upoštevati morebitno večkratnost nekaterih polov:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{R(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_i)^r\cdots(s+s_n)} = \\ &= \frac{k_1}{(s+s_1)} + \frac{k_2}{(s+s_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(s+s_n)} + \underbrace{\frac{A_1}{(s+s_i)} + \frac{A_2}{(s+s_i)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s+s_i)^r}}_{\text{pri večkratnem polu moramo pisati vse zaporedne potence} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Števila  $k_1, k_2, \dots, k_n$  in  $A_1, A_2, \dots, A_r$  dobimo po Heavisidovih<sup>8</sup> formulah.

Koeficiente  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , ki so v števcu tistih ulomkov, kjer nastopa le enojni pol, izračunamo takole:

$$k_\lambda = (s+s_\lambda) \cdot F(s) \Big|_{s=-s_\lambda} \quad \text{za } \lambda = 1, 2, \dots, n \quad (3.46)$$

Koeficiente  $A_1, A_2, \dots, A_r$ , ki nastopajo v števcu pri zaporednih potencah večkratnega pola, pa dobimo po formulah:

<sup>8</sup> Oliver Heaviside (1850-1925), angleški matematik in fizik.

$$\begin{aligned}
 A_r &= \left[ (s + s_i)^r F(s) \right]_{s=-s_i} \\
 A_{r-1} &= \frac{d}{ds} \left[ (s + s_i)^r F(s) \right]_{s=-s_i} \\
 A_{r-2} &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s + s_i)^r F(s) \right]_{s=-s_i} \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[ (s + s_i)^r F(s) \right]_{s=-s_i}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Primer:

Izračunajmo realno funkcijo  $y(t)$ , če poznamo njen Laplaceov transform, ki se glasi

$$Y(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Rešitev:

Po formuli (3.45) napišemo dani ulomek kot vsoto parcialnih ulomkov

$$Y(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

Koeficienti  $k_1$ ,  $k_2$  in  $k_3$  ustrezajo enojnim polom in jih izračunamo po formuli (3.46).

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \left[ (s+1)Y(s) \right]_{s=-1} = \left[ (s+1) \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-1} = \\
 &= \left[ \frac{5s+3}{(s+2)(s+3)} \right]_{s=-1} = \frac{5 \cdot (-1) + 3}{(-1+2)(-1+3)} = -1
 \end{aligned}$$

$$k_2 = \left[ (s+2)Y(s) \right]_{s=-2} = \left[ (s+2) \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-2} = 7$$

$$k_3 = \left[ (s+3)Y(s) \right]_{s=-3} = \left[ (s+3) \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-3} = -6$$

Torej je:  $Y(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} + \frac{-6}{s+3}$  in od tod iz tabele Laplaceovih transformov preberemo rešitev:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} + \frac{-6}{s+3}\right\} = \\ &= (-1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + (-6)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t} \end{aligned}$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo realno funkcijo  $y(t)$ , če poznamo njen Laplaceov transform

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3}$$

Rešitev:

V tem primeru imamo tudi večkratni pol pri  $s = -1$ , zato po formuli (3.45) napišemo parcialne ulomke takole

$$\frac{1}{s(s+2)(s+1)^3} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3}$$

Koeficienta  $k_1$  in  $k_2$ , ki ustrezata enojnima poloma  $s = 0$  in  $s = -2$ , dobimo po formuli (3.46), koeficiente  $A_1, A_2$  in  $A_3$ , ki pripadajo trikratnemu polu  $s = -1$ , pa dobimo po formulah (3.47).

$$k_1 = [sY(s)]_{s=0} = \left[ \frac{1}{(s+2)(s+1)^3} \right]_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = [(s+2)Y(s)]_{s=-2} = \left[ \frac{1}{s(s+1)^3} \right]_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = [(s+1)^3 Y(s)]_{s=-1} = \left[ \frac{1}{s(s+2)} \right]_{s=-1} = -1$$

$$A_2 = \frac{d}{ds} [(s+1)^3 Y(s)]_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{s(s+2)} \right]_{s=-1} = \left[ \frac{0 - [(s+2) + s]}{s^2(s+2)^2} \right]_{s=-1} = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{(3-1)!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s+1)^3 Y(s) \right]_{s=-1} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{1}{s(s+2)} \right]_{s=-1} =$$

$$= \left[ -\frac{s^2(s+2)^2 - (s+1)(4s^3 + 6s^2 + 8s)}{s^4(s+2)^4} \right]_{s=-1} = -1$$

Od tod je

$$Y(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^3}$$

in iskana funkcija (glej tabelo):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2}(1+e^{-2t}) - \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$$

◆◆◆

Zaradi lastnosti Laplaceove transformacije, ki odvod realne funkcije spremeni v Laplaceov transform te funkcije pomnožen s potenco kompleksne spremenljivke  $s$ , je Laplaceova transformacija izjemno uporabno (in predvsem preprosto) orodje za reševanje diferencialnih enačb. Z njeno uporabo preslikamo diferencialno enačbo realne funkcije v enostavno algebrsko enačbo ustrezne stopnje funkcije kompleksne spremenljivke. Če je diferencialna enačba 1. reda, dobimo z Laplaceovo transformacijo v kompleksnem območju linearno enačbo, če imamo diferencialno enačbo 2. reda, dobimo v kompleksnem območju kvadratno enačbo in podobno za poljubno stopnjo.

Seveda je treba upoštevati, da pri Laplaceovi transformaciji odvoda vedno nastopajo znani robni/začetni pogoji, zato je dobljena rešitev diferencialne enačbe vedno partikularna. Diferencialne enačbe torej računamo tako, da jih iz realnega območja z Laplaceovo transformacijo pretvorimo v algebrske enačbe v kompleksnem območju (kompleksni ravnini), kjer to enačbo brez težav rešimo. Ker je to rešitev v kompleksni ravnini, jo moramo z inverzno Laplaceovo transformacijo preslikati nazaj v realno območje.

#### Primer:

Iz uporabo Laplaceove transformacije izračunajmo partikularno rešitev diferencialne enačbe  $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = f(t)$  pri začetnih pogojih  $y(0) = 1$  in  $\dot{y}(0) = 1$ .

(Opomba: Odvode smo pisali s piko, ker je neodvisna spremenljivka označena s črko  $t$ , ni pa to nujno, lahko uporabimo tudi znak »črtica«).

#### Rešitev:

Na enačbi  $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = f(t)$  izvedimo Laplaceovo transformacijo. Zaradi lastnosti linearnosti je

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Zaradi (3.37) in (3.38) ter danih začetnih pogojev ( $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 1$ ) pa je

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{y(t)\} - 1 - s \quad \text{in} \quad \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = s \mathcal{L}\{y(t)\} - 1.$$

Vstavimo oboje v zgornjo enačbo  $\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$ :

$$\left[ s^2 \mathcal{L}\{y(t)\} - 1 - s \right] + \left[ s \mathcal{L}\{y(t)\} - 1 \right] - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Označimo  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  in dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} [s^2 + s - 6] - s - 2 &= F(s) \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= \frac{F(s)}{s^2 + s - 6} + \frac{s + 2}{s^2 + s - 6} = \frac{F(s)}{(s+3)(s-2)} + \frac{s+2}{(s+3)(s-2)} \end{aligned}$$

Označimo še

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s), \quad P(s) = \frac{1}{(s+3)(s-2)} \quad \text{in} \quad Q(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s-2)}$$

in imamo zapis

$$Y(s) = F(s)P(s) + Q(s)$$

Iskano rešitev diferencialne enačbe dobimo z inverzno Laplaceovo transformacijo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)P(s) + Q(s)\} = \int_0^t p(t-\tau) f(\tau) d\tau + \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$$

Iz funkcij  $P(s)$  in  $Q(s)$  bomo dobili  $p(t)$  in  $q(t)$  z inverzno Laplaceovo transformacijo. V ta namen bomo vsakega od obeh ulomkov  $P(s)$  in  $Q(s)$  zapisali kot vsoto parcialnih ulomkov.

Najprej opravimo z  $P(s)$ .

$$P(s) = \frac{k_1}{s+3} + \frac{k_2}{s-2}$$

Koeficienta  $k_1$  in  $k_2$  dobimo po formuli (3.46):

$$k_1 = \left[ (s + s_1) \cdot P(s) \right]_{s=-s_1} = \left[ (s+3) \frac{1}{(s+3)(s-2)} \right]_{s=-3} = \left[ \frac{1}{(s-2)} \right]_{s=-3} = -\frac{1}{5}$$

$$k_2 = \left[ (s + s_2) \cdot P(s) \right]_{s=-s_2} = \left[ (s-2) \frac{1}{(s+3)(s-2)} \right]_{s=2} = \left[ \frac{1}{(s+3)} \right]_{s=2} = \frac{1}{5}$$

Od tod je: 
$$P(s) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s-2}$$

Na podoben način zapišemo funkcijo

$$Q(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s-2)} = \frac{k_1}{(s+3)} + \frac{k_2}{(s-2)}$$

$$k_1 = \left[ (s + s_1) \cdot Q(s) \right]_{s=-s_1} = \left[ (s+3) \frac{(s+2)}{(s+3)(s-2)} \right]_{s=-3} = \left[ \frac{s+2}{s-2} \right]_{s=-3} = \frac{1}{5}$$

$$k_2 = \left[ (s + s_2) \cdot Q(s) \right]_{s=-s_2} = \left[ (s-2) \frac{(s+2)}{(s+3)(s-2)} \right]_{s=2} = \left[ \frac{s+2}{s+3} \right]_{s=2} = \frac{4}{5}$$

Od tod je:

$$Q(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s-2}$$

Pripadajoča inverzuma sta tedaj:

$$p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = -\frac{1}{5} e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{2t}$$

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+3)(s-2)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \frac{1}{5} e^{-3t} + \frac{4}{5} e^{2t}$$

Partikularna rešitev diferencialne enačbe se torej glasi:



$$y(t) = \int_0^t p(t-\tau) f(\tau) d\tau + \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \int_0^t \left[ -\frac{1}{5} e^{-3(t-\tau)} + \frac{1}{5} e^{2(t-\tau)} \right] f(\tau) d\tau + \frac{1}{5} e^{-3t} + \frac{4}{5} e^{2t}$$

◆◆◆

### 3.2.5 Računanje inverzne Laplaceove transformacije z residui

V tem poglavju najprej pogledimo nekaj definicij in izrekov (brez dokazov)<sup>9</sup>, ki jih nujno potrebujemo, da pridemo do pojma residuum in do njegove uporabe pri računanju inverzne Laplaceove transformacije.

**Definicija:** Kompleksno funkcijo  $f(s)$  imenujemo *regularno analitično* v danem območju  $D$ , če ima v vsaki točki tega območja odvod in je ta odvod zvezna funkcija.

**Definicija:** Če je funkcija  $f(s)$  v krogu  $K$  s središčem v točki  $s_0$  in polmerom  $R$  povsod regularno analitična, razen v središču  $s_0$ , potem točko  $s_0$  imenujemo *izolirana singularna točka* dane funkcije.

**Izrek 1:** Če je funkcija  $f(s)$  regularno analitična povsod v nekem območju  $D$  in na njegovi ograji  $C$ , velja

$$\oint_C f(s) ds = 0 \quad (3.48)$$

Z znakom  $\oint_C$  označujemo integral po sklenjeni krivulji  $C$ .

**Izrek 2:** Če je funkcija  $f(s)$  regularno analitična v območju  $D$  in njegovi ograji  $C$ , velja za vsak  $s \in D$

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - s} d\xi \quad (3.49)$$

**Izrek 3:** Funkcija  $f(s)$ , ki je zvezna na območju  $D$ , je regularno analitična, če je integral po vsaki sklenjeni krivulji tega območja enak 0.

<sup>9</sup> Dokaze glej npr. v knjigi Ivan Vidav, Višja matematika III.

Izrek 4 (Laurentov teorem): Če je  $f(s)$  regularno analitična po dveh koncentričnih krožnicah  $C_1$  in  $C_2$  s središčem v točki  $s_0$  in v območju  $D$  med njima, potem moremo funkcijo  $f(s)$  razviti v Laurentovo vrsto

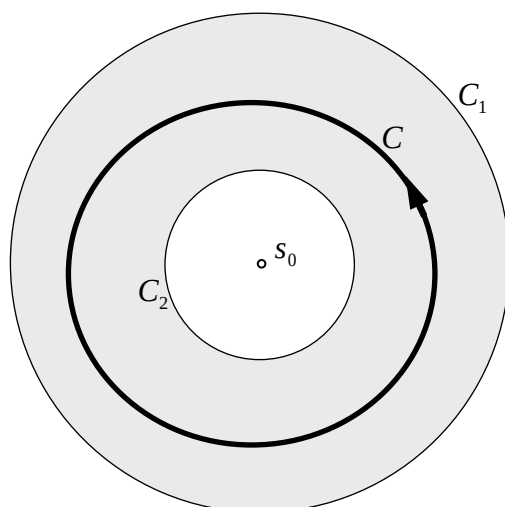
$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s-s_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(s-s_0)^k} = \\ &= a_0 + a_1(s-s_0) + a_2(s-s_0)^2 + a_3(s-s_0)^3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{b_1}{s-s_0} + \frac{b_2}{(s-s_0)^2} + \frac{b_3}{(s-s_0)^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.50)$$

Koeficiente Laurentove vrste izračunamo po formulah:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-s_0)^{k+1}} d\xi \quad (3.51)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (\xi-s_0)^{k-1} f(\xi) d\xi \quad (3.52)$$

V integralih (3.51) in (3.52) integriramo v nasprotni smeri kroženja kazalcev na uri (pozitivna smer) po poljubni sklenjeni krivulji  $C$ , ki leži v območju  $D$  med krožnicama  $C_1$  in  $C_2$  - slika 3.06.



Slika 3.06: Smer sklenjene krivulje  $C$ , ki leži v območju  $D$  med krožnicama  $C_1$  in  $C_2$

Opomba: Pogosto zapišemo Laurentovo vrsto v obliki:

$$f(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (s-s_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s-s_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(s-s_0)^k} \quad (3.53)$$

Koeficiente  $b_k$  tedaj označujemo z znaki  $a_{-k}$ . Koeficiente v (3.53) dobimo s formulo:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-s_0)^{k+1}} d\xi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.54)$$

Poseben primer:

Če je funkcija  $f(s)$  regularno analitična *povsod znotraj zunanjega kroga*  $C_1$ , potem so vsi  $b_k = 0$  in se Laurentova vrsta glasi:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s-s_0)^k \quad (3.55)$$

Izrek 5: Funkcijo, ki je v točki  $s_0$  regularno analitična, lahko razvijemo v potenčno vrsto (3.55).

Definicija: Koeficient  $b_1$  (oziroma  $a_{-1}$ ) v Laurentovi vrsti okrog točke  $s_0$  imenujemo **residuum** funkcije  $f(s)$  v točki  $s_0$ . Residuum označimo na več načinov. V rabi so oznake:  $\text{Res}_{s=s_0} f(s)$ ,  $(a_{-1})_0$ ,  $\text{Res}(s_0)$ .

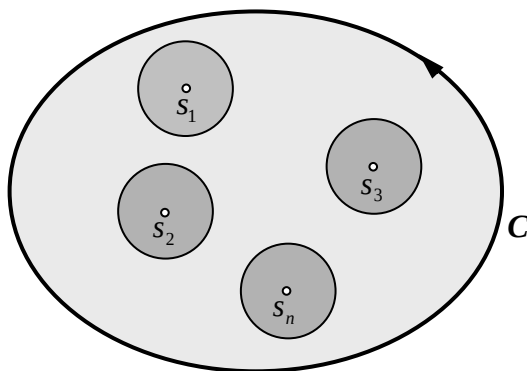
Če krivulja  $C$  ne zajame drugih singularnih točk kot  $s_0$ , potem po (3.52) oz. (3.54) dobimo za residuum

$$\text{Res}_{s=s_0} f(s) = b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) d\xi \quad (3.56)$$

Izrek 6 (izrek o residuih):

Funkcija  $f(s)$  naj bo regularno analitična na krivulji  $C$  in povsod v območju, ki ga ta krivulja obdaja, razen v končnem številu točk  $s_1, s_2, \dots, s_n$  (slika 3.07), v katerih ima residue:  $\text{Res}_{s=s_1} f(s), \text{Res}_{s=s_2} f(s), \dots, \text{Res}_{s=s_n} f(s)$ . Tedaj je integral funkcije  $f(s)$  po sklenjeni krivulji v pozitivni smeri enak produktu  $2\pi i$  in vsote vseh residuov:

$$\oint_C f(s) ds = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{s=s_j} f(s) \quad (3.57)$$



Slika 3.07: Točke  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , v katerih ima regularno analitična funkcija  $f(s)$  residue

Za konkretno računanje residuov lahko izpeljemo takšno pripravno formulo:

$$\text{Res}_{s=s_k} f(s) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \left\{ \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} (s-s_k)^N f(s) \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.58)$$

V formuli (3.58) pomeni  $N$  stopnjo pola  $s_k$  funkcije  $F(s)$ ,  $n$  pa je skupno število polov te funkcije.

Napišimo to formulo za  $N = 1, 2, 3$ .

Za enojni pol (pol prve stopnje,  $N = 1$ ) velja:

$$\text{Res}_{s=s_0} f(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} [(s-s_0) f(s)] \quad (3.59)$$

Za *dvojni pol* (pol druge stopnje,  $N = 2$ ) velja:

$$\boxed{\operatorname{Res}_{s=s_0} f(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} \left\{ \left[ (s-s_0)^2 f(s) \right]' \right\}} \quad (3.60)$$

Za *trikratni pol* (pol tretje stopnje,  $N = 3$ ) velja:

$$\boxed{\operatorname{Res}_{s=s_0} f(s) = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow s_0} \left\{ \left[ (s-s_0)^3 f(s) \right]'' \right\}} \quad (3.61)$$

Primer:

Izračunajmo residue funkcije  $f(s) = \frac{3s+i}{s^3+s}$ .

Rešitev:

Funkcija  $f(s) = \frac{3s+i}{s^3+s} = \frac{3s+i}{s(s+i)(s-i)}$  ima tri enojne pole:  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -i$ ,  $s_3 = i$ .

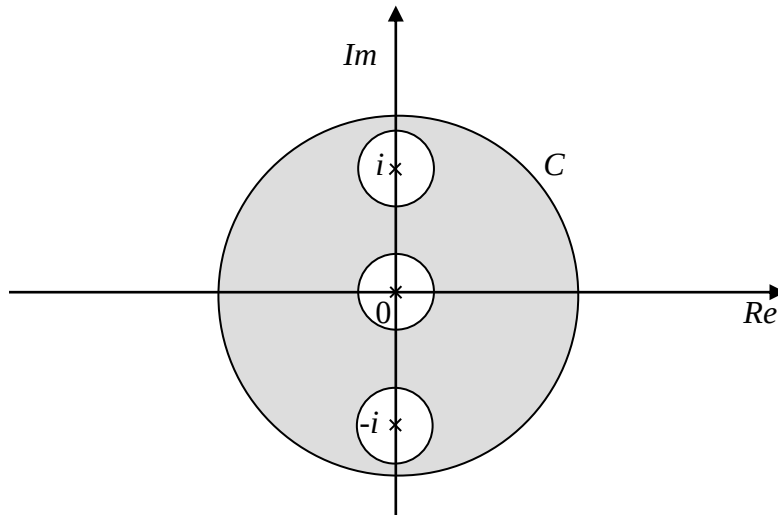
Residue v teh točkah izračunamo po formuli (3.59):

$$\operatorname{Res}_{s=0} \frac{3s+i}{s(s+i)(s-i)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{3s+i}{s(s+i)(s-i)} \right] = \left[ \frac{3s+i}{(s+i)(s-i)} \right]_{s=0} = \frac{i}{-i^2} = i$$

$$\operatorname{Res}_{s=-i} \frac{3s+i}{s(s+i)(s-i)} = \lim_{s \rightarrow -i} \left[ (s+i) \frac{3s+i}{s(s+i)(s-i)} \right] = \left[ \frac{3s+i}{s(s-i)} \right]_{s=-i} = \frac{-2i}{-2i^2} = i$$

$$\operatorname{Res}_{s=i} \frac{3s+i}{s(s+i)(s-i)} = \lim_{s \rightarrow i} \left[ (s-i) \frac{3s+i}{s(s+i)(s-i)} \right] = \left[ \frac{3s+i}{s(s+i)} \right]_{s=i} = \frac{4i}{2i^2} = -2i$$

Še grafični prikaz:



◆◆◆

Sedaj uporabimo residue pri računanju inverzne Laplaceove transformacije.

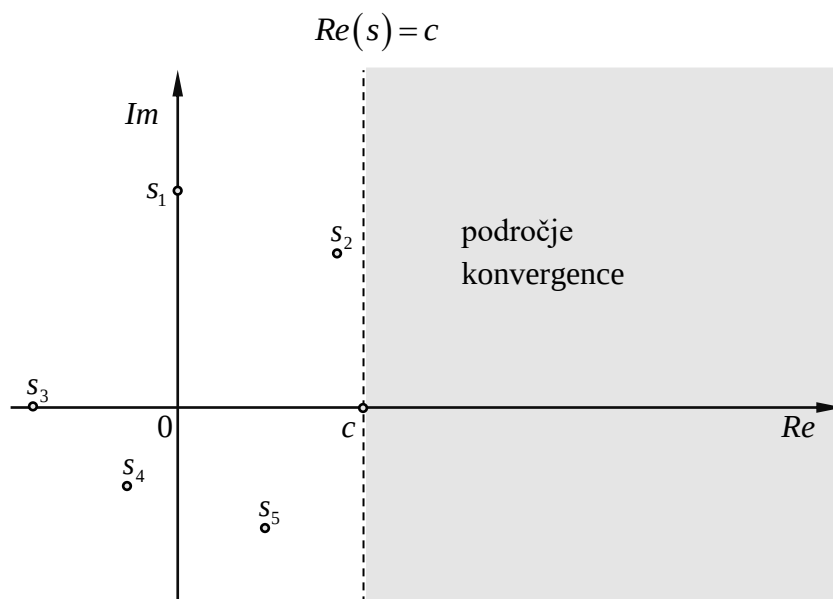
Laplaceov transform  $F(s)$  je analitična funkcija, regularna v vsej polravnini, kjer je realni del kompleksne spremenljivke (označimo:  $\text{Re } s$ ) večji od  $\sigma_a$ , torej  $\text{Re } s > \sigma_a$ . Funkcija  $F(s)$  je lahko analitična celo v vsej kompleksni ravnini in ima v končnosti le pole, ki pa morajo biti seveda le v polravnini  $\text{Re } s < \sigma_a$ . V takšnem primeru je mogoče funkcijo  $f(t)$  izračunati z uporabo residuov.

Inverzna Laplaceova transformacija  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  je po formuli (3.29)

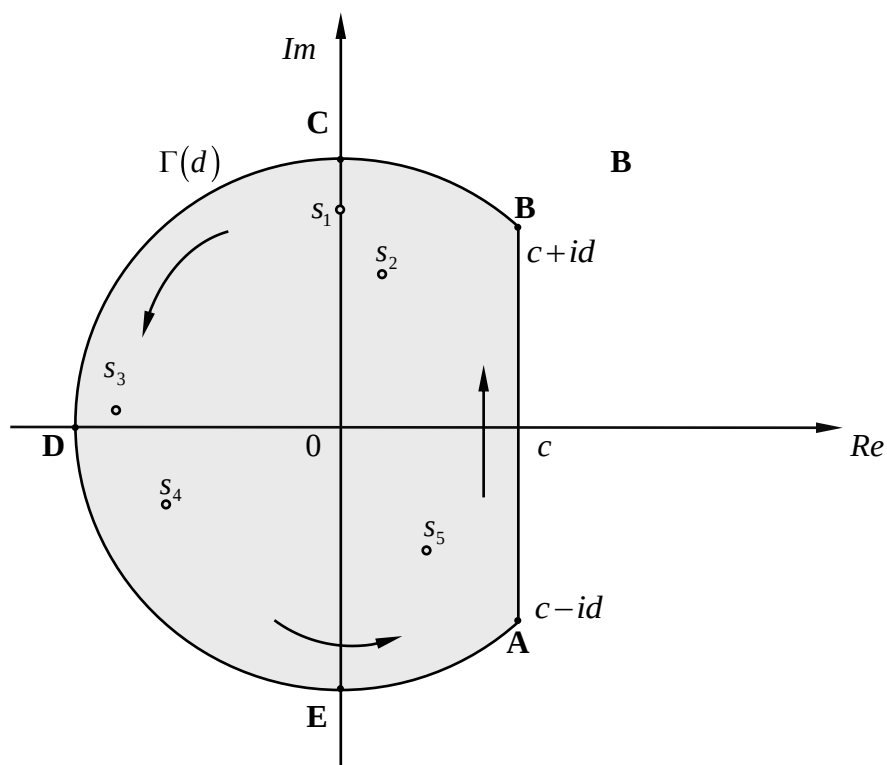
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} F(s) e^{st} ds, c > \sigma_a$$

Integral v zgornji formuli računamo vzdolž navpične premice, kjer je realni del  $\text{Re}(s) = c$ , ki smo jo dobili tako, da ležijo vse singularnosti, torej vsi poli funkcije  $F(s)$  na levi strani te premice – slika 3.08.

Če želimo uporabiti residue, moramo računati integral po sklenjeni krivulji v nasprotni smeri poteka kazalcev na uri. Krivuljni integral vzdolž premice  $\text{Re}(s) = c$  dobimo tako, da si zamislimo krožnico s središčem v izhodišču koordinatnega sistema, z dovolj velikim polmerom, da zajame vse singularnosti funkcije  $F(s)$ . Sklenjena krivulja  $\Gamma(d)$  je sestavljena iz dela krožnice s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in daljice med točkama na premici  $\text{Re}(s) = c$ , v katerih krožnica seka premico. Če je  $d$  dovolj velik, so v notranjosti krivulje  $\Gamma(d)$  vsi poli funkcije  $F(s)$  – slika 3.09.



Slika 3.08: Poli funkcije  $F(s)$  ležijo levo od premice  $Re(s) = c$



Slika 3.09: Sklenjena krivulja  $\Gamma(d)$ , poli funkcije  $F(s)$  in smer integriranja

Po izreku o residuih tedaj velja:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(d)} F(s) e^{st} ds = \sum_k \operatorname{Res}_{s=s_k} f(s) \quad (3.62)$$

Z  $f(s)$  smo označili integrand v krivuljnem integralu, torej  $f(s) = F(s)e^{st}$ .

Integral po poti  $\Gamma(d)$  razdelimo na dva dela: na integral po daljici  $\overline{AB}$  in po delu krožnice  $\widehat{BCDEA}$ .

$$\oint_{\Gamma(d)} F(s) e^{st} ds = \int_{\overline{AB}} F(s) e^{st} ds + \int_{\widehat{BCDEA}} F(s) e^{st} ds \quad (3.63)$$

Ker velja za integral po krožnici  $\int_{\widehat{BCDEA}} F(s) e^{st} ds = 0$ , sledi iz (3.62) in (3.63)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB}} F(s) e^{st} ds = \sum_k \operatorname{Res}_{s=s_k} f(s) \quad (3.64)$$

Od tod je integral, ki določa inverzno Laplaceovo transformacijo, kar enak vsoti vseh residuov, ki se nahajajo levo od premice  $\sigma = c$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} F(s) e^{st} ds = \sum_k \operatorname{Res}_{s=s_k} F(s) e^{st} \quad (3.65)$$

Primer:

Z uporabo parcialnih ulomkov in s pomočjo tabele Laplaceovih transformov smo že ugotovili,

da je  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3} \right\} = \frac{1}{2}(1+e^{-2t}) - \left(1+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$ . Izračunajmo to še z uporabo residuov.

Rešitev:

Gre za kompleksno funkcijo  $F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3}$ , ki jo moramo z inverzno Laplaceovo transformacijo preslikati v realno območje. Po formuli (3.65) je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} ds = \sum_k \operatorname{Res}_{s=s_k} \left[ \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right]$$

Residue bomo dobili po splošni formuli (3.58), konkretnije po formuli (3.59) za enojna pola in po formuli (3.61) za trikratni pol.



Za enojna pola  $s = 0$  in  $s = -2$  velja:

$$\operatorname{Res}_{s=0} \left[ \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right] = \left[ \frac{e^{st}}{(s+2)(s+1)^3} \right]_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{s=-2} \left[ \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[ (s+2) \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right] = \left[ \frac{e^{st}}{s(s+1)^3} \right]_{s=-2} = \frac{1}{2} e^{-2t}$$

Za pol tretje stopnje pri  $s = -1$  pa je:

$$\operatorname{Res}_{s=-1} \left[ \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right] = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s+1)^3 \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{e^{st}}{s(s+2)} \right]_{s=-1}$$

Z nekoliko daljšim računom dobimo še tretji residuum:

$$\operatorname{Res}_{s=-1} \left[ \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right] = \frac{1}{2} (-t^2 e^{-t} - 2e^{-t})$$

Od tod je iskana funkcija:

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{s=s_k} \left[ \frac{e^{st}}{s(s+2)(s+1)^3} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} (-t^2 e^{-t} - 2e^{-t}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2t}) - \left( 1 + \frac{t^2}{2} \right) e^{-t}$$

Rezultat je seveda takšen, kot ga za ta primer poznamo od prej.

◆◆◆

Primer: V matematičnem modelu temeljnega logističnega problema optimalnega upravljanja skladišč (zalog in proizvodnje), dobimo za eno od oblik povpraševanja v kompleksnem prostoru takšne rešitve<sup>10</sup>:

a) optimalna proizvodnja:

$$u_{\text{opt}}(s) = \frac{Cs+1}{As+1} d(s) = \zeta \cdot \frac{Cs+1}{(As+1)(s+\alpha)}$$

b) optimalna zaloga:

<sup>10</sup> Janez Usenik, Upravljanje logističnih sistemov, Biro 4D, Novo mesto, 2003.

$$Z_{\text{opt}}(s) = \zeta \frac{(Cs+1)e^{-\lambda s} - (As+1)}{(As+1)(s+\alpha)}$$

Pri tem pomenijo v realnem času:

$Z(t)$  - zaloga posameznih izdelkov v skladišču v trenutku  $t$ ,

$u(t)$  - proizvodnja posameznih izdelkov v trenutku  $t$ ,

$d(t)$  - povpraševanje po izdelku v trenutku  $t$ ,

$C, A, \alpha, \lambda, \sigma, \zeta$  - konstante (pozitivna realna števila), dobljene empirično.

Funkcije  $Z(t), u(t)$  in  $d(t)$  so v tem primeru zvezni stacionarni slučajni procesi. Logistični sistem je potrebno upravljati tako, da bodo skupni stroški minimalni. Ugotoviti se da, da so ti skupni stroški

$$S(s) = \frac{(A-C)^2}{A^2 s^2 - 1} \cdot \frac{2\alpha\sigma^2}{s^2 - \alpha^2} + A^2 \frac{1-C^2 s^2}{A^2 s^2 - 1} \cdot \frac{2\alpha\sigma^2}{s^2 - \alpha^2}$$

Z uporabo residuov izračunajmo inverzne Laplaceove transformacije funkcij  $u(t)$ ,  $Z(t)$  in  $S(t)$ .

Rešitev:

Funkcija  $u_{\text{opt}}(s) = \frac{\zeta}{A} \cdot \frac{Cs+1}{\left(s+\frac{1}{A}\right)(s+\alpha)}$  ima dva enojna pola:  $s_1 = -\frac{1}{A}$ ,  $s_2 = -\alpha$ , torej velja

$$u_{\text{opt}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{u(s)\} = \sum_{k=1}^2 \text{Res}_{s=s_k} [u(s)e^{st}]$$

Residua sta:

$$\text{Res}_{s=-\frac{1}{A}}(u(s)e^{st}) = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{A}} \left[ \left(s + \frac{1}{A}\right) \frac{\zeta(Cs+1)e^{st}}{A\left(s + \frac{1}{A}\right)(s+\alpha)} \right] = \frac{\zeta(A-C)e^{-\frac{t}{A}}}{A(A\alpha-1)}$$

$$\text{Res}_{s=-\alpha}(u(s)e^{st}) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ (s+\alpha) \frac{\zeta(Cs+1)e^{st}}{A\left(s + \frac{1}{A}\right)(s+\alpha)} \right] = \frac{\zeta(1-\alpha C)e^{-\alpha t}}{(1-A\alpha)}$$

Od tod sledi:

$$u_{\text{opt}}(t) = \frac{\zeta(A-C)e^{-\frac{t}{A}}}{A(A\alpha-1)} + \frac{\zeta(1-\alpha C)e^{-\alpha t}}{(1-A\alpha)} = \frac{\zeta}{1-\alpha A} \left[ \frac{C-A}{A} e^{-\frac{t}{A}} + (1-C\alpha)e^{-\alpha t} \right]$$

Na podoben način bi dobili optimalno zalogo (tudi tu sta dva enojna pola  $s_1 = -\frac{1}{A}$ ,  $s_2 = -\alpha$ ):

$$Z_{\text{opt}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = \sum_{k=1}^2 \text{Res}_{s=s_k} [Z(s)e^{st}] = \frac{M\zeta}{\alpha} \left[ e^{-\frac{1}{A}(t-\lambda)} - Ke^{-\alpha t} \right]$$

kjer sta konstanti:

$$K = \frac{C\alpha - 1}{1 - \alpha A} \cdot e^{\alpha\lambda} \quad \text{ter} \quad M = \frac{\alpha(A - C)}{1 - \alpha A}.$$

Še skupni optimalni stroški:

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{(A - C)^2}{A^2 s^2 - 1} \cdot \frac{2\alpha\sigma^2}{s^2 - \alpha^2} + A^2 \frac{1 - C^2 s^2}{A^2 s^2 - 1} \cdot \frac{2\alpha\sigma^2}{s^2 - \alpha^2} = \\ &= \frac{2\alpha\sigma^2 (2A(A - C) + C^2(1 - A^2 s^2))}{(A^2 s^2 - 1)(s^2 - \alpha^2)} = \frac{2\alpha\sigma^2}{A^2} \cdot \frac{2A(A - C) + C^2(1 - A^2 s^2)}{\left(s - \frac{1}{A}\right)\left(s + \frac{1}{A}\right)(s - \alpha)(s + \alpha)} \end{aligned}$$

V zgornjem izrazu imamo štiri enojne pole:  $s_1 = \frac{1}{A}$ ,  $s_2 = -\frac{1}{A}$ ,  $s_3 = \alpha$ ,  $s_4 = -\alpha$  in od tod štiri residue:

$$\text{Res}_{s=\frac{1}{A}}(S(s)e^{st}) = K_1 e^{\frac{1}{A}t}$$

$$\text{Res}_{s=-\frac{1}{A}}(S(s)e^{st}) = -K_1 e^{-\frac{1}{A}t}$$

$$\text{Res}_{s=\alpha}(S(s)e^{st}) = K_2 e^{\alpha t}$$

$$\text{Res}_{s=-\alpha}(S(s)e^{st}) = K_2 e^{-\alpha t}$$

Tu sta konstanti

$$K_1 = \frac{2\alpha\sigma^2 A^2 (A - C)}{1 - A^2 \alpha^2}$$

$$K_2 = \frac{\sigma^2 (2A(A - C) + C^2(1 - A^2 \alpha^2))}{1 - A^2 \alpha^2}$$

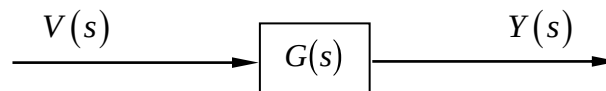
Skupni optimalni stroški so:

$$S_{opt}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(s)\} = \sum_{k=1}^4 \operatorname{Res}_{s=s_k} [S(s)e^{st}] = K_1 \left( e^{\frac{1}{A}t} - e^{-\frac{1}{A}t} \right) - K_2 (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$$

◆◆◆

### Primer:

Pri sistemih z enim vhomom  $v(t)$  in enim izhodom  $y(t)$  ugotavljamo stabilnost sistema z analizo *prenosne funkcije*  $G(s)$ . Prenosna funkcija je definirana kot kvocient med Laplaceovim transformom izhodne funkcije in Laplaceovim transformom vhodne funkcije (slika 3.10):  $G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)}$



Slika 3.10: Prenosna funkcija sistema

Sistem vzbujamo z vhodno funkcijo  $v(t)$ , ki jo imenujemo tudi *vzbujevalni signal*. Sistem na ta signal reagira z izhodno funkcijo  $y(t)$ , ki jo imenujemo tudi *odziv sistema*. Časovni odziv sistema je sestavljen iz dveh delov: *prehodni pojav*  $y_t(t)$  in *ustaljeno (stacionarno) stanje*  $y_{ss}(t)$ , kar zapišemo v obliki:

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t) \quad (3.66)$$

Prehodni pojav predstavlja tiste razmere, pri katerih gre sistem iz začetnega stanja v končno stanje nič. V matematičnem smislu pomeni rešitev homogenega dela diferencialne enačbe, ki modelira sistem. Ustaljeno stanje pa predstavlja obnašanje sistema, ko gre čas  $t$  proti neskončnosti, torej gre za tisti del odziva, ki nastane potem, ko prehodni pojav preneha (*izzveni*). Ustaljeno stanje sistema izračunamo po enačbi:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (3.67)$$

Odziv sistema dobimo s pomočjo prenosne funkcije tega sistema, saj velja

$$Y(s) = G(s)V(s) \quad (3.68)$$

V enačbi (3.68) sta  $V(s)$  in  $Y(s)$  Laplaceova transformata vhodne in izhodne funkcije,  $G(s)$  pa je prenosna funkcija sistema. Odziv sistema  $y(t)$  dobimo iz (3.68) z inverzno Laplaceovo transformacijo  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ .

Če označimo Laplaceov inverzum prenosne funkcije  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ , je zaradi lastnosti inverzne Laplaceove transformacije res:

$$y(t) = \int_0^t v(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau)v(t-\tau) d\tau \quad (3.69)$$

Opomba: funkcija  $y(t)$  je konvolucija funkcij  $v(t)$  in  $g(t)$ .

Funkcija  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$  pomeni odziv sistema, ko je vhodna funkcija impulzna  $\delta$  funkcija, saj je Laplaceov transform funkcije  $\delta(t)$  enak 1:  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ . Ko je torej vhodna funkcija  $v(t) = \delta(t)$ , je izhodna funkcija kar enaka prenosni funkciji  $G(s)$ , saj velja

$$Y(s) = G(s) \mathcal{L}\{\delta(t)\} = G(s) \cdot 1 = G(s) \Rightarrow y(t) = g(t) \quad (3.70)$$

Odzivu sistema na impulzno  $\delta$  funkcijo pravimo tudi *naravni odziv sistema*. Obnašanje sistema je torej najtesneje odvisno od oblike prenosne funkcije  $G(s)$ .

Odziv sistema je funkcija (3.69), ki ima lahko različne oblike, pač v odvisnosti od funkcij  $V(s)$  in  $G(s)$ . Vhodne funkcije, s katerimi vzbujamo sistem, skušamo izbirati med znanimi funkcijami ( $\delta$  impulz, enotina/skočna stopnica, linearni signal, kvadratna funkcija itd., v nekaterih primerih stohastične narave pa so to lahko tudi slučajne funkcije), tako da je odziv in s tem obnašanje sistema prvenstveno odvisen od oblike prenosne funkcije  $G(s)$ .

Ta funkcija je v splošnem vedno podana kot kvocient dveh polinomov kompleksne spremenljivke  $s$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.71)$$

Vzemimo, da je stopnja polinoma v števcu nižja od stopnje polinoma v imenovalcu (če temu ni tako, smemo števec deliti z imenovalcem), torej  $m < n$ . Imenovalec lahko razstavimo na produkt  $n$  linernih faktorjev in ulomek (3.71) zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{P(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_i)^r\dots(s+s_n)} = \\ &= \frac{k_1}{(s+s_1)} + \frac{k_2}{(s+s_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s+s_n)} + \frac{A_1}{(s+s_i)} + \frac{A_2}{(s+s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s+s_i)^r} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Števila  $s_1, s_2, \dots, s_n$  so poli funkcije (3.71). Nekateri poli so lahko tudi večkratni. Števila  $k_1, k_2, \dots, k_n$  in  $A_1, A_2, \dots, A_r$  izračunamo po Heavisidovih formulah (3.46) in (3.47), nato pa iz tabele Laplaceovih transformov dobimo funkcije v časovnem območju. Rešitev pa seveda lahko dobimo tudi z uporabo residuov.

◆◆◆

Primer:

Za zgled zgornjega teksta si oglejmo sistem, ki je opisan z diferencialno enačbo  $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{v}(t) + v(t)$ , pri čemer naj bodo vsi začetni pogoji enaki nič, torej  $y(0) = \dot{y}(0) = v(0) = 0$ .

Prenosno funkcijo sistema dobimo tako, da na enačbi, ki opisuje sistem, opravimo Laplaceovo transformacijo

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t)\} = \mathcal{L}\{2\dot{v}(t) + v(t)\}.$$

Označimo Laplaceova transformata  $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$  in  $\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s)$ , upoštevamo lastnosti Laplaceove transformacije odvodov in dane začetne pogoje, pa dobimo

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (2s + 1)V(s)$$

in od tod

$$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

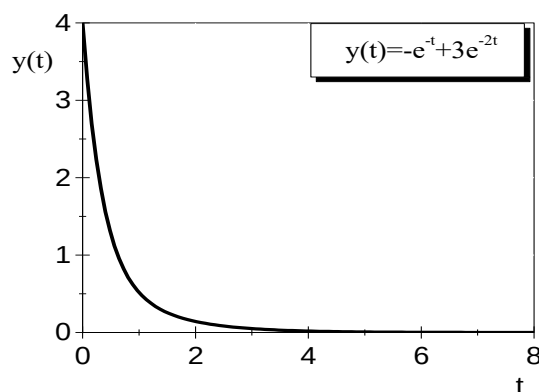
Ulomek lahko zapišemo kot vsoto dveh parcialnih ulomkov

$$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{2s + 1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{-1}{s + 1} + \frac{3}{s + 2}$$

in od tod z inverzno Laplaceovo transformacijo (uporabimo tabeli transformov)

$$g(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t}$$

Graf te funkcije je na sliki 3.11.



Slika 3.11: Graf funkcije  $g(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t}$

Vidimo, da gre funkcija z naraščajočim  $t$  proti nič, kar pomeni, da se odziv sistema stabilizira oziroma se z naraščajočim časom izniči. V takšnem primeru je sistem stabilen.

Iz tega zgleada vidimo, da je stabilnost sistema očitno vezana na lego polov prenosne funkcije  $G(s)$ .

Velja:

- a) Kadar so poli v levi kompleksni polravnini, je funkcija  $g(t)$  v splošnem neka linearna kombinacija funkcij  $e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$  in  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ .
- b) Kadar so poli v desni kompleksni polravnini, je funkcija  $g(t)$  v splošnem neka linearna kombinacija funkcij  $e^{\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$  in  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ .

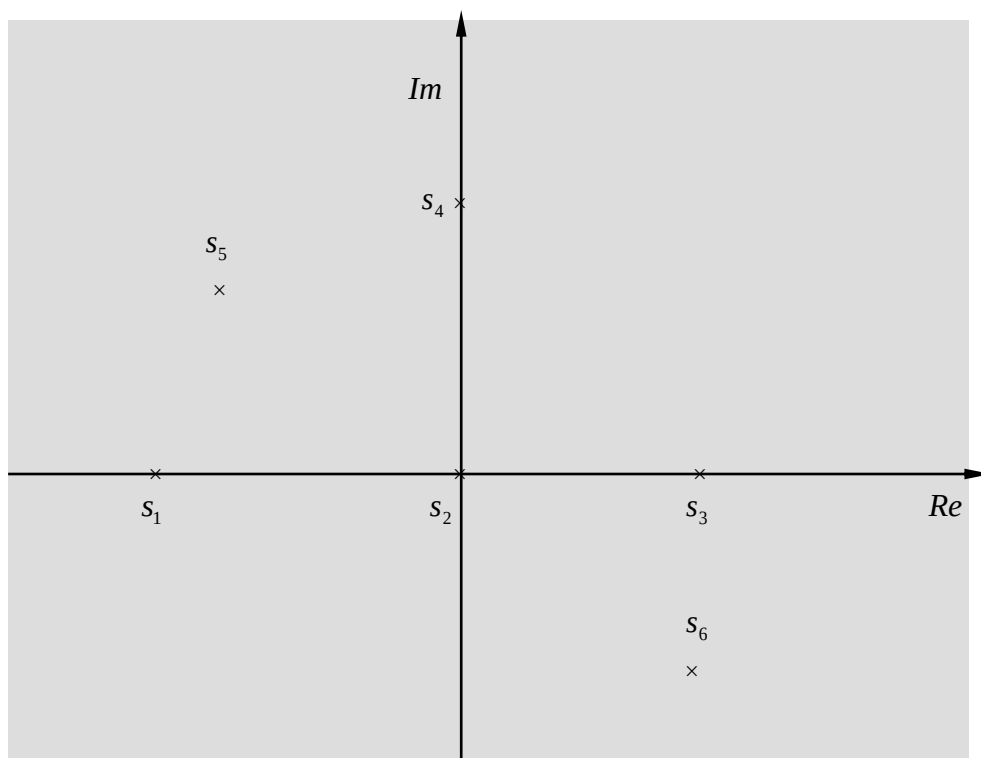
Če leži pol v desni kompleksni polravnini, je torej časovni odziv sistema neka monotono naraščajoča funkcija ali pa niha z naraščajočo amplitudo. V tem primeru je sistem nestabilen in obstaja nevarnost, da se poškoduje ali celo razpade.

Velja torej pravilo: *kadar so ti poli v levem delu kompleksne ravnine, je sistem stabilen, kadar pa so poli v desnem delu kompleksne ravnine, je sistem nestabilen.*

*Pole pa bi lahko dobili tudi na imaginarni osi. V tem primeru je odziv periodična funkcija s stalno amplitudo, vendar se v konkretnih sistemih zaradi morebitnih motenj ta amplituda lahko ojača in sistem postane nestabilen.*

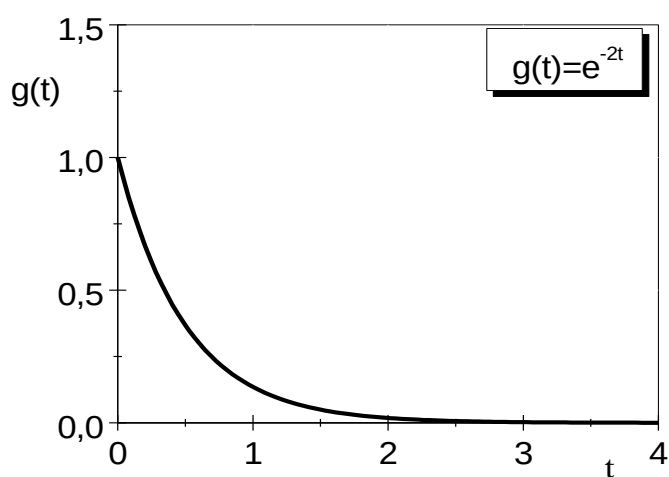
Vse možnosti lege polov prenosne funkcije so naslednje (slika 3.12):

1. pol je v levi polravnini na realni osi, na sliki označen z  $s_1$ ,
2. pol je v koordinatnem izhodišču, na sliki označen z  $s_2$ ,
3. pol je v desni polravnini na realni osi, na sliki označen z  $s_3$ ,
4. pol je na imaginarni osi, na sliki označen z  $s_4$ ,
5. pol je v levi polravnini, vendar ni na realni osi (nad ali pod njo), na sliki označen z  $s_5$ ,
6. pol je v desni polravnini, vendar ni na realni osi (nad ali pod njo), na sliki označen z  $s_6$ .



Slika 3.12. Različne lege polov v kompleksni ravnini

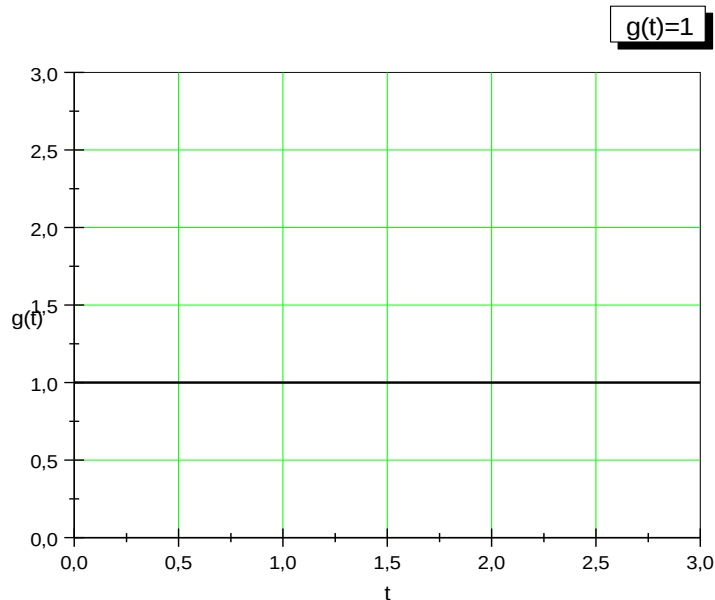
1. Pol oblike  $s_1$ : imaginarna komponenta kompleksnega števila  $s_1$  je nič, zato je  $s_1$  kar negativno realno število. Za takšen primer smo že ugotovili, da pripadajoča časovna funkcija eksponentno pada (slika), torej je tedaj sistem stabilen, primer na sliki je funkcija  $g(t) = e^{-2t}$ , pol je torej  $s_1 = -2$ .



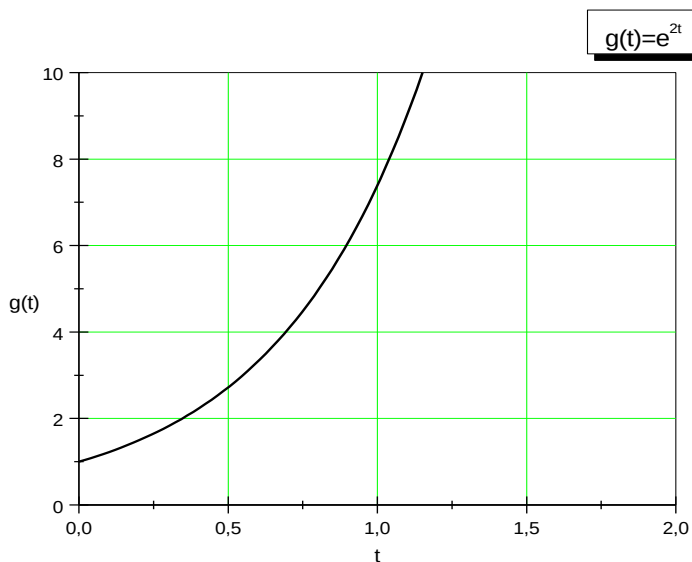


2. Pol oblike  $s_2$ : v tem primeru je pol v koordinatnem izhodišču, torej je  $s_2 = 0$ .

Funkcija  $G(s) = \frac{1}{s}$  ima inverzni Laplaceov transform  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$  za nenegativne čase, to je za  $t \geq 0$ . Funkcija je konstantna,  $g(t) = 1$ .



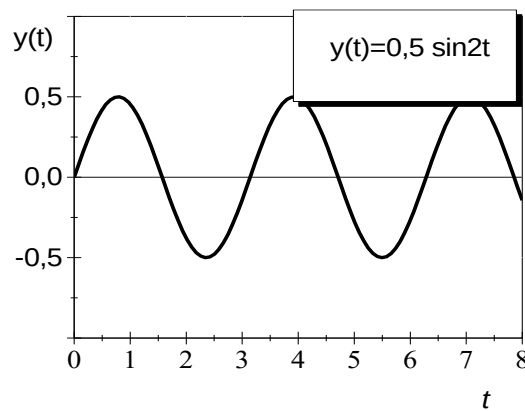
3. Pol oblike  $s_3$ : imaginarna komponenta kompleksnega števila  $s_3$  je nič, zato je  $s_3$  kar *pozitivno* realno število. V takšnem primeru pripadajoča časovna funkcija eksponentno narašča, torej je sistem nestabilen. Na sliki je funkcija  $g(t) = e^{2t}$ , torej je  $s_3 = 2$ .



4. Pol oblike  $s_4$ : realna komponenta kompleksnega števila  $s_4$  je nič, zato lahko to število napišemo v obliki  $s_4 = i\omega$ . Kompleksni poli seveda vedno nastopajo le v konjugiranih parih, zato sta pola v takšnem primeru vedno dva:  $\pm i\omega$ . Gre torej za funkcijo oblike

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}, \text{ za katero je inverzni Laplaceov transform, ki ga preberemo iz tabele,}$$

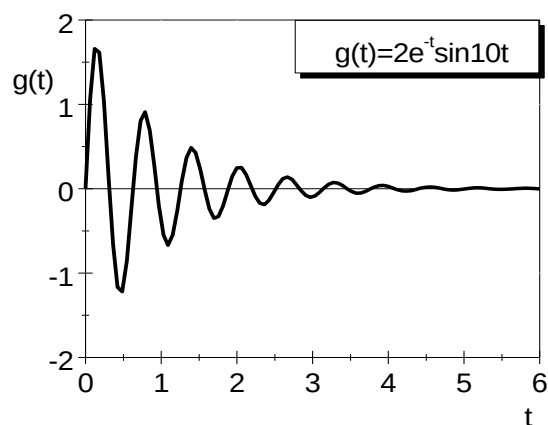
enak  $g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$ . Opravka imamo s sinusno funkcijo, ki ima stalno amplitudo. Čim večji je  $\omega$ , tem večja je frekvenca sinusnega nihanja. Grafično to pomeni, da imajo tisti poli, ki so na ordinatni (imaginarni) osi bolj daleč od koordinatnega izhodišča, večjo frekvenco kot tisti, ki so na tej osi bližje koordinatnemu izhodišču.



5. Pol oblike  $s_5$ : niti realna komponenta niti imaginarna komponenta kompleksnega števila  $s_5$  nista enaki nič, zato lahko to število napišemo v obliki  $s_5 = -a + i\omega$ ,  $a > 0$ . Podobno kot pri prejšnji točki, velja tudi tu: kompleksni poli vedno nastopajo v konjugiranih parih, zato sta pola v takšnem primeru vedno dva:

$$-a \pm i\omega, a > 0. \text{ Gre torej za funkcijo oblike } G(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \text{ za katero}$$

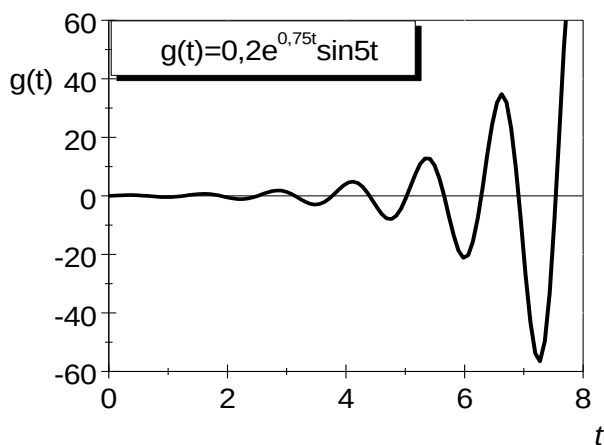
velja:  $g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \right\} = \frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t$ . Ker je  $\alpha > 0$ , je  $-\alpha < 0$  in funkcija eksponentno *dušeno* sinusno niha, torej je sistem stabilen.



6. Pol oblike  $s_6$ : tudi sedaj niti realna komponenta niti imaginarna komponenta kompleksnega števila  $s_6$  nista enaki nič, zato lahko to število napišemo v obliki  $s_5 = a + i\omega$ ,  $a > 0$ . Kompleksni poli vedno nastopajo v konjugiranih parih, zato sta pola v takšnem primeru vedno dva:  $a \pm i\omega$ ,  $a > 0$ . Gre torej za funkcijo oblike

$$G(s) = \frac{1}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}, \text{ za katero velja: } g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \right\} = \frac{1}{\omega} e^{\alpha t} \sin \omega t.$$

Ker je  $\alpha > 0$ , zato funkcija eksponentno *naraščajoče* sinusno niha, kar pomeni, da sistem ni stabilen.



◆◆◆

# IV

## DISKRETNA ANALIZA

## 4.1 DISKRETNA FUNKCIJA

V tem poglavju bomo najprej spoznali pojem **diskretne funkcije**, nato pa še nekatera matematična orodja, s katerimi diskretno funkcijo analiziramo, raziščemo in seveda uporabljamo.

Doslej smo vedno obravnavali le funkcije, pri katerih je zaloga vrednosti zvezna na nekem zaprtem intervalu  $a, b \in \mathbb{R}$ . V tem primeru govorimo o zveznih funkcijah.

Sedaj pa se bomo omejili na takšne vrednosti neodvisne spremenljivke, ki bodo sestavljale množico *diskretnih* vrednosti  $x_0, x_1, x_2, \dots$ .

Brez škode za splošnost lahko vzamemo, da so te vrednosti neodvisne spremenljivke  $x_0, x_1, x_2, \dots$  med seboj enako oddaljene (*ekvidistantne*):

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h, \dots \quad (4.01)$$

V (4.01) je *razmik* ali *diferenčni interval*  $h$  od nič različno število,  $x_0$  pa je začetna vrednost neodvisne diskretne spremenljivke. Vrednosti  $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h, \dots$  tvorijo aritmetično zaporedje s prvim členom  $x_0$  in diferenco  $h$ .

V praktičnih primerih je mnogokrat pomembno, da je ekvidistančna razdalja normirana, torej velika 1 enoto. Ta pogoj lahko brez težav dosežemo, če uvedemo novo neodvisno spremenljivko, recimo ji  $t$ , s substitucijo:

$$t = \frac{x - (x_0 - kh)}{h}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.02)$$

Iz (4.02) dobimo:

- za  $k = 0$ :  $t = \frac{x - x_0}{h} = k$
  - za  $k = 1$ :  $t = \frac{x - x_0 + h}{h} = \frac{x - x_0}{h} + 1 = k + 1$
  - za  $k = 2$ :  $t = \frac{x - x_0 + 2h}{h} = \frac{x - x_0}{h} + 2 = k + 2$
  - za  $k = 3$ :  $t = \frac{x - x_0 + 3h}{h} = \frac{x - x_0}{h} + 3 = k + 3$
- in tako dalje.

Z uvedbo nove neodvisne spremenljivke  $t$  po formuli (4.02) aritmetično zaporedje neodvisnih spremenljivk  $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$  s prvim členom  $x_0$  in diferenco  $h$  pretvori v aritmetično zaporedje  $k, k + 1, k + 2, k + 3, \dots$  s prvim členom  $k$  in diferenco 1, torej se nove neodvisne spremenljivke res povečujejo za korak 1.

Primer:

Število prebivalstva v nekem manjšem kraju se je spreminjalo tako, kot je prikazano v spodnji tabeli:

|                 |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| leto $x$        | 1960  | 1970  | 1980  | 1990  | 2000  | 2010  |
| število prebiv. | 4.200 | 5.300 | 5.200 | 5.600 | 6.700 | 7.000 |

Zaloga vrednosti neodvisne spremenljivke  $x$  (leta) je  $\{1960, 1970, 1980, 1990, 2000, 2010\}$ .

S substitucijo (4.02) lahko dobimo tabelo s korakom 1. Vzemimo, naj bo še prvi člen  $k=1$ . Torej je:

$$x_0=1960, x_1=1970, x_2=1980, x_3=1990, x_4=2000, x_5=2010 \text{ in } h=10, k=1.$$

Z uporabo (4.02) dobimo zaporedoma diskretne vrednosti za posamezna leta:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{x_0 - (x_0 - kh)}{h} = \frac{1960 - (1960 - 10 \cdot 1)}{10} = \frac{10}{10} = 1 \\ t_1 &= \frac{x_1 - (x_0 - kh)}{h} = \frac{1970 - (1960 - 10 \cdot 1)}{10} = \frac{20}{10} = 2 \\ t_2 &= \frac{x_2 - (x_0 - kh)}{h} = \frac{1980 - (1960 - 10 \cdot 1)}{10} = \frac{30}{10} = 3 \\ t_3 &= \frac{x_3 - (x_0 - kh)}{h} = \frac{1990 - (1960 - 10 \cdot 1)}{10} = \frac{40}{10} = 4 \\ t_4 &= \frac{x_4 - (x_0 - kh)}{h} = \frac{2000 - (1960 - 10 \cdot 1)}{10} = \frac{50}{10} = 5 \\ t_5 &= \frac{x_5 - (x_0 - kh)}{h} = \frac{2010 - (1960 - 10 \cdot 1)}{10} = \frac{60}{10} = 6 \end{aligned}$$

Še tabela:

|                 |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| leto $t$        | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
| število prebiv. | 4.200 | 5.300 | 5.200 | 5.600 | 6.700 | 7.000 |

◆ ◆ ◆

Odslej naprej bomo diskretne neodvisne spremenljivke obravnavali v obliki *aritmetičnega zaporedja* s korakom oziroma diferenco 1, tako da jih bomo vedno zapisovali takole:  $x, x+1, x+2, x+3, \dots$  (ali včasih tudi  $k, k+1, k+2, k+3, \dots$ ). Pri tem naj zaradi praktičnih razlogov, ki jih obmo spoznali v kasnejši uporabi, neodvisna spremenljivka zasede le nenegativne cele vrednosti,  $x \geq 0$  oziroma  $k \geq 0$ .

#### Definicija:

Če vsaki diskretni neodvisni spremenljivki z nekim znanim pravilom priredimo natanko določeno vrednost, dobimo **diskretno funkcijo**, ki jo bomo označili

$$y_x = y(x) \quad (4.03)$$

Pri tem dosega neodvisna spremenljivka  $x$  vrednosti  $x=0, 1, 2, 3, \dots$ . Te vrednosti določajo definicijsko območje ali domeno neodvisne spremenljivke  $x$ .

Očitno lahko diskretno funkcijo izrazimo v obliki zaporedja  $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ , kar zapišemo kot zalogo vrednosti  $Y: \{y_0, y_1, y_2, y_3, \dots\}$  ali pa zapišemo v tabelo:

| $x$          | 0            | 1            | 2            | 3            | 4            | ... |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----|
| $y_x = y(x)$ | $y_0 = y(0)$ | $y_1 = y(1)$ | $y_2 = y(2)$ | $y_3 = y(3)$ | $y_4 = y(4)$ | ... |

#### Opomba:

Mnogokrat – odvisno od primera – začnemo šteti neodvisno spremenljivko z 1 in ne z 0, kar seveda ne vpliva na splošnost.

Če želimo spoznati in seveda zlasti uporabljati diskretne funkcije, je potrebno (podobno kot pri zveznih funkcijah) tudi tu vpeljati in definirati nekatere pojme, kar bomo storili v nadaljevanju.

### 4.1.1 Prve difference diskretne funkcije

Vzemimo poljubno diskretno funkcijo  $y_x = y(x)$ . Zaporedju neodvisnih spremenljivk  $x, x+1, x+2, x+3, \dots$  pripada zaporedje funkcijskih vrednosti:  $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}, \dots$

Pri tem v skladu z dogovorjeno pisavo v (4.03) pomenijo:

$$y_x = y(x), y_{x+1} = y(x+1), y_{x+2} = y(x+2), y_{x+3} = y(x+3) \text{ itd.}$$

Definicija:

Razlike med sosednimi funkcijskimi vrednostmi

$$\begin{array}{l}
 \Delta y_x = y_{x+1} - y_x \\
 \Delta y_{x+1} = y_{x+2} - y_{x+1} \\
 \dots\dots \\
 \Delta y_{x+n} = y_{x+n+1} - y_{x+n}
 \end{array}
 \tag{4.04}$$

imenujemo **prve difference** funkcije  $y_x = y(x)$ . Znak  $\Delta$  imenujemo **diferenčni operator**.

Primer:

Diskretna funkcija naj bo podana s pravilom  $y_x = x^2 + 3$ , kjer neodvisno spremenljivko izbiramo iz množice  $X: \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Določimo prve difference te funkcije.

Rešitev:

Iskane prve difference znane diskretne funkcije bomo dobili po definiciji (4.04) za posamezne vrednosti neodvisne spremenljivke iz definicijskega območja  $X$ . Za dano diskretno funkcijo je zaporedje funkcijskih vrednosti:

$$\begin{array}{l}
 y_0 = y(0) = 0^2 + 3 = 3 \\
 y_1 = y(1) = 1^2 + 3 = 4 \\
 y_2 = y(2) = 2^2 + 3 = 7 \\
 \dots\dots
 \end{array}$$

Prve difference so:

$$\begin{array}{l}
 \Delta y_0 = y_1 - y_0 = 4 - 3 = 1 \\
 \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 7 - 4 = 3 \\
 \dots\dots \\
 \Delta y_x = y_{x+1} - y_x = [(x+1)^2 + 3] - (x^2 + 3) = 2x + 1
 \end{array}$$

◆◆◆

#### 4.1.1.1 Lastnosti prve difference

Diferenciranje diskretnih funkcij ima podoben smisel, pomen in tudi namen kot odvajanje zveznih funkcij.

Lastnosti prve difference lahko brez težav ugotovimo neposredno iz definicije prve difference (4.04).



1. Prva diferenca konstante je nič:

$$y_x = C \Rightarrow \Delta y_x = 0 \quad (4.05)$$

Dokaz: Ker je diskretna funkcija konstantna, je  $y_x = C$  in  $y_{x+1} = C$ . Prva diferenca je  $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = C - C = 0$ .

2. Pri diferenciranju se multiplikativna konstanta ohrani:

$$\Delta(C \cdot y_x) = C \cdot \Delta y_x \quad (4.06)$$

Dokaz:  $\Delta(C \cdot y_x) = C \cdot y_{x+1} - C \cdot y_x = C \cdot (y_{x+1} - y_x) = C \cdot \Delta y_x$

3. Naj bodo  $y_x^1, y_x^2, y_x^3, \dots, y_x^n$  poljubne diskretne funkcije, za katere je mogoče izračunati prvo diferenco,  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  pa naj bodo poljubne konstante. Za prvo diferenco linearne kombinacije  $C_1 y_x^1 + C_2 y_x^2 + C_3 y_x^3 + \dots + C_n y_x^n$  velja:

$$\Delta(C_1 y_x^1 + C_2 y_x^2 + \dots + C_n y_x^n) = C_1 \Delta y_x^1 + C_2 \Delta y_x^2 + \dots + C_n \Delta y_x^n \quad (4.07)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \Delta(C_1 y_x^1 + C_2 y_x^2 + \dots + C_n y_x^n) &= (C_1 y_{x+1}^1 + C_2 y_{x+1}^2 + \dots + C_n y_{x+1}^n) - (C_1 y_x^1 + C_2 y_x^2 + \dots + C_n y_x^n) = \\ &= C_1 (y_{x+1}^1 - y_x^1) + C_2 (y_{x+1}^2 - y_x^2) + \dots + C_n (y_{x+1}^n - y_x^n) = \\ &= C_1 \Delta y_x^1 + C_2 \Delta y_x^2 + \dots + C_n \Delta y_x^n \end{aligned}$$

4. Za prvo diferenco produkta dveh diskretnih funkcij velja lastnost:

$$\Delta(y_x^1 y_x^2) = \Delta y_x^1 y_x^2 + y_{x+1}^1 \Delta y_x^2 \quad (4.08)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \Delta(y_x^1 y_x^2) &= y_{x+1}^1 y_{x+1}^2 - y_x^1 y_x^2 = y_{x+1}^1 y_{x+1}^2 - y_x^1 y_x^2 + y_{x+1}^1 y_x^2 - y_{x+1}^1 y_x^2 = \\ &= y_{x+1}^1 (y_{x+1}^2 - y_x^2) + y_x^2 (y_{x+1}^1 - y_x^1) = y_{x+1}^1 \Delta y_x^2 + y_x^2 \Delta y_x^1 \end{aligned}$$

6. Za prvo diferenco kvocienta dveh diskretnih funkcij velja pravilo:

$$\Delta \left( \frac{y_x^1}{y_x^2} \right) = \frac{\Delta y_x^1 y_x^2 - y_x^1 \Delta y_x^2}{y_x^2 y_{x+1}^2}, \quad y_x^2 \neq 0 \quad (4.09)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{y_x^1}{y_x^2} \right) &= \frac{y_{x+1}^1}{y_{x+1}^2} - \frac{y_x^1}{y_x^2} = \frac{y_{x+1}^1 y_x^2 - y_x^1 y_{x+1}^2}{y_x^2 y_{x+1}^2} = \frac{y_{x+1}^1 y_x^2 - y_x^1 y_{x+1}^2 + y_x^1 y_x^2 - y_x^1 y_x^2}{y_x^2 y_{x+1}^2} = \\ &= \frac{y_x^2 (y_{x+1}^1 - y_x^1) - y_x^1 (y_{x+1}^2 - y_x^2)}{y_x^2 y_{x+1}^2} = \frac{y_x^2 \Delta y_x^1 - y_x^1 \Delta y_x^2}{y_x^2 y_{x+1}^2} \end{aligned}$$

Primer:

Preverimo veljavnost relacije:

$$\Delta \binom{x}{r} = \binom{x}{r-1} \quad (4.10)$$

Rešitev:

Po definiciji prve difference  $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$  sledi za to funkcijo :

$$\begin{aligned} \Delta \binom{x}{r} &= \binom{x+1}{r} - \binom{x}{r} = \frac{(x+1)!}{r!(x+1-r)!} - \frac{x!}{r!(x-r)!} = \frac{(x+1)! - x!(x-r+1)}{r!(x+1-r)!} = \\ &= \frac{x!r}{r!(x-r+1)!} = \frac{x!}{(r-1)!(x-(r-1))} = \binom{x}{r-1} \end{aligned}$$

◆◆◆

Iz definicije (4.04) dobimo prve difference nekaterih konkretnih diskretnih funkcij. Za vajo izračunajmo prve difference treh preprostih funkcij:  $y_x = x$ ,  $y_x = a^x$ ,  $y_x = 2^x$ .

Za linearno funkcijo  $y_x = x$  je prva diferenca

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = (x+1) - x = 1.$$

Za eksponentno funkcijo  $y_x = a^x$  je prva diferenca

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1).$$

Funkcija  $y_x = 2^x$  je le poseben primer zgornje, kjer je  $a=2$ , zato je  $\Delta 2^x = 2^x(2-1) = 2^x$ .

Prve difference teh in še nekaterih drugih, ki jih večkrat uporabljamo, zapišimo v tabelo.

**Tabela: Prve difference nekaterih diskretnih funkcij**

| $y_x = y(x)$   | $\Delta y_x$                                               |
|----------------|------------------------------------------------------------|
| C              | 0                                                          |
| $x$            | 1                                                          |
| $a^x$          | $(a-1)a^x, a > 0, a \neq 1$                                |
| $2^x$          | $2^x$                                                      |
| $x^{(n)}$      | $n x^{(n-1)}$                                              |
| $(x+a)^{(n)}$  | $n(x+a)^{(n-1)}$                                           |
| $\binom{x}{r}$ | $\binom{x}{r-1}$                                           |
| $\cos(ax+b)$   | $-2 \sin \frac{a}{2} \sin \left( ax+b+\frac{a}{2} \right)$ |
| $\sin(ax+b)$   | $2 \sin \frac{a}{2} \cos \left( ax+b+\frac{a}{2} \right)$  |
| $\ln(x+a)$     | $\ln \frac{x+a+1}{x+a}$                                    |

V zgornji tabeli srečamo zapis  $x^{(n)}$ , ki ga imenujemo **faktorska potenca**. Pri diskretnih funkcijah namreč »običajna« potenca  $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\text{-krat}}$ , kot smo je navajeni doslej, neugodna

za računanje, zato vpeljemo faktorsko potenco, s katero je v diskretni analizi mogoče računati mnogo enostavneje.

Definicija:

*Faktorska potenca je funkcija, določena z izrazom*

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \binom{x}{n} n! \quad , \quad n \in \mathbb{N}, x \neq 0 \quad (4.11)$$

Za faktorske potence velja adicijski teorem:

$$x^{(m+n)} = x^{(m)}(x-m)^{(n)} = x^{(n)}(x-n)^{(m)} \quad (4.12)$$

Z uporabo formule (4.12) lahko definicijo faktorske potence razširimo na množico celih števil ( $n \in \mathbb{Z}$ ):

$$x^{(0)} = 1 \quad (4.13)$$

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \quad (4.14)$$

Sedaj nas zanima še zveza med potencami in faktorskimi potencami. Ta povezava je enostavna in jo dobimo iz definicije (4.04).

#### **a) Pretvorba faktorskih potenc v potence:**

Iz faktorskih potenc dobimo potence takole:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x \\ x^{(2)} &= x(x-1) = x^2 - x \\ x^{(3)} &= x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^{(4)} &= x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \\ &\text{itd.} \end{aligned}$$

#### **b) pretvorba potenc v faktorske potence:**

Iz potenc dobimo faktorske potence z majhnimi zvijačami takole:

$$\begin{aligned} x &= x^{(1)} \\ x^2 &= x(x-1) + x = x^{(2)} + x^{(1)} \\ x^3 &= x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x = x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)} - 2x^{(1)} = x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)} \\ &\text{itd.} \end{aligned}$$

Pretvarjane potenc v faktorske potence in obratno je v splošnem podano s formulama:

$$x^{(n)} = s_1^n x + s_2^n x^2 + \dots + s_n^n x^n \quad (4.15)$$

$$x^n = S_1^n x^{(1)} + S_2^n x^{(2)} + \cdots + S_n^n x^{(n)} \quad (4.16)$$

Koeficienti  $s_r^n$ ,  $r=1, 2, \dots, n$  v formuli (4.15) so *Stirlingova števila 1. vrste*, koeficienti  $S_r^n$ ,  $r=1, 2, \dots, n$  v formuli (4.16) pa so *Stirlingova števila 2. vrste*.

Stirlingova števila pregledno zapišemo v tabelah.

**Tabela: Stirlingova števila 1. vrste**  $s_r^n$ ,  $r=1, 2, \dots, n$

| $\begin{smallmatrix} r \\ n \end{smallmatrix}$ | 1    | 2     | 3    | 4    | 5   | 6   | 7 |
|------------------------------------------------|------|-------|------|------|-----|-----|---|
| 1                                              | 1    |       |      |      |     |     |   |
| 2                                              | -1   | 1     |      |      |     |     |   |
| 3                                              | 2    | -3    | 1    |      |     |     |   |
| 4                                              | -6   | 11    | -6   | 1    |     |     |   |
| 5                                              | 24   | -50   | 35   | -10  | 1   |     |   |
| 6                                              | -120 | 274   | -225 | 85   | -15 | 1   |   |
| 7                                              | 720  | -1764 | 1624 | -735 | 175 | -21 | 1 |

Primer:

$$x^{(5)} = s_1^5 x + s_2^5 x^2 + s_3^5 x^3 + s_4^5 x^4 + s_5^5 x^5 = 24x - 50x^2 + 35x^3 - 10x^4 + x^5$$

◆◆◆

**Tabela: Stirlingova števila 2. vrste**  $S_r^n$ ,  $r=1, 2, \dots, n$

| $\begin{smallmatrix} r \\ n \end{smallmatrix}$ | 1 | 2  | 3   | 4   | 5   | 6  | 7 |
|------------------------------------------------|---|----|-----|-----|-----|----|---|
| 1                                              | 1 |    |     |     |     |    |   |
| 2                                              | 1 | 1  |     |     |     |    |   |
| 3                                              | 1 | 3  | 1   |     |     |    |   |
| 4                                              | 1 | 7  | 6   | 1   |     |    |   |
| 5                                              | 1 | 15 | 25  | 10  | 1   |    |   |
| 6                                              | 1 | 31 | 90  | 65  | 15  | 1  |   |
| 7                                              | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 |

Primer:

$$\begin{aligned} x^6 &= S_1^6 x^{(1)} + S_2^6 x^{(2)} + S_3^6 x^{(3)} + S_4^6 x^{(4)} + S_5^6 x^{(5)} + S_6^6 x^{(6)} = \\ &= x^{(1)} + 31x^{(2)} + 90x^{(3)} + 65x^{(4)} + 15x^{(5)} + x^{(6)} \end{aligned}$$

◆◆◆

## 4.1.2 Diference višjega reda

Podobno, kot smo pri zveznih funkcijah vpeljali višje odvode, je mogoče v diskretni analizi vpeljati pojem difference višjega reda. Diference drugega reda dobimo z diferenciranjem diferenc 1. reda, do diferenc tretjega reda pridemo z diferenciranjem diferenc 2. reda itd...

Definicija: **Diference 2. reda** so izrazi

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x) = \Delta(y_{x+1} - y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = \\ &= (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x) = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_{x+1} &= \Delta(\Delta y_{x+1}) = \Delta(y_{x+2} - y_{x+1}) = \\ &= \Delta y_{x+2} - \Delta y_{x+1} = y_{x+3} - y_{x+2} - (y_{x+2} - y_{x+1}) = y_{x+3} - 2y_{x+2} + y_{x+1}\end{aligned}\quad (4.18)$$

itd.

**Diference 3. reda** so izrazi

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_x &= \Delta(\Delta^2 y_x) = \Delta^2 y_{x+1} - \Delta^2 y_x = y_{x+3} - 2y_{x+2} + y_{x+1} - (y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x) = \\ &= y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$\Delta^3 y_{x+1} = \Delta(\Delta^2 y_{x+1}) = \Delta^2 y_{x+2} - \Delta^2 y_{x+1} = y_{x+4} - 3y_{x+3} + 3y_{x+2} - y_{x+1}\quad (4.20)$$

itd.

Splošno je **diferenca n-tega reda**:

$$\Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-1} y_x) = \Delta^{n-1} y_{x+1} - \Delta^{n-1} y_x = \binom{n}{0} y_{x+n} - \binom{n}{1} y_{x+n-1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} y_x\quad (4.21)$$

Primer:

Izračunajmo difference prvih štirih redov funkcije  $y_x = x^3$ .

Rešitev:

- prva diferenca:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = (x+1)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

- druga diferenca:

a) po formuli (4.17)

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = (x+2)^3 - 2(x+1)^3 + x^3 = 6x + 6$$

b) po definiciji

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x) = \Delta(y_{x+1} - y_x) = \Delta((x+1)^3 - x^3) = \Delta(3x^2 + 3x + 1) = \\ &= 3\Delta x^2 + 3\Delta x + \Delta 1 = 3\Delta(x^{(2)} + x^{(1)}) + 3\Delta x + \Delta 1 = 3(\Delta x^{(2)} + \Delta x^{(1)}) + 3\Delta x + \Delta 1 = \\ &= 3(2x+1) + 3 + 0 = 6x + 6 \end{aligned}$$

Opomba: difference funkcij  $x^{(2)}, x^{(1)}$  in 1 smo dobili v tabeli prvih diferenc.

- tretja diferenca:

$$\Delta^3 y_x = (x+3)^3 - 3(x+2)^3 + 3(x+1)^3 - x^3 = 6$$

- četrta diferenca in vse višje so nič, ker je tretja diferenca konstanta.

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo prve tri zaporedne difference diskretne funkcije  $y_x = x^2$  za  $x \in \{0, 1, 2\}$  in jih zapišimo v tabelo.

Rešitev:

Za diskretno funkcijo  $y_x = x^2$  velja

$$y_{x+1} = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$y_{x+2} = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$y_{x+3} = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Prve tri zaporedne difference so potem v splošnem

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$$

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = (x^2 + 4x + 4) - 2(x^2 + 2x + 1) + x^2 = 2$$

$$\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x = 0$$

V te difference vstavimo zapored vrednosti neodvisne spremenljivke  $x=0$ ,  $x=1$  in nato še  $x=2$  ter dobimo naslednje vrednosti diferenc:

a) za  $x=0$ :

$$\Delta y_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$\Delta^2 y_2 = 2$$

$$\Delta^3 y_2 = 0$$

b) za  $x=1$ :

$$\Delta y_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$\Delta^2 y_1 = 2$$

$$\Delta^3 y_1 = 0$$

c) za  $x=2$ :

$$\Delta y_0 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\Delta^2 y_0 = 2$$

$$\Delta^3 y_0 = 0$$

◆◆◆

Primer:

Poiščimo vse zaporedne difference diskretne funkcije  $y_x = ax^2 + bx + c$ .

Rešitev:

Prva diferenca je po definiciji

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b$$

Druga diferenca

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = 2a(x+1) + a + b - (2ax + a + b) = 2a$$

Ker je druga diferenca konstanta, so vse višje difference enake nič:

$$\Delta^3 y_x = \Delta(\Delta^2 y_x) = 2a - 2a = 0$$

$$\Delta^4 y_x = 0 \quad \text{itd.}$$

◆◆◆



### 4.1.3 Antidiferenca

Naj bo diskretna funkcija  $Y_x = Y(x)$  takšna, da je njena diferenca 1. reda neka diskretna funkcija  $y_x = y(x)$ , torej naj velja:  $\Delta Y_x = y_x$ . Vzemimo, da poznamo funkcijo  $y_x$  in iščemo funkcijo  $Y_x$ . V tem primeru pravimo, da dobimo iskano funkcijo z antidiferenciranjem, kar zapišemo takole:

$$Y_x = \Delta^{-1} y_x \quad (4.22)$$

Definicija: Diskretna funkcija  $Y_x$ , za katero velja (4.22), je **antidiferenca** diskretne funkcije  $y_x$ . Operator  $\Delta^{-1}$  imenujemo **antidiferenčni operator**.

Omenili smo že, da ima operacija diferenciranja pri diskretnih funkcijah podoben pomen kot odvajanje pri zveznih funkcijah, za antidiferenco pa lahko (zelo pogojno) rečemo, da ima pri diskretnih funkcijah podoben pomen kot nedoločeni integral pri zveznih funkcijah.

Lastnosti antidiference dobimo iz definicije (4.22) in iz lastnosti difference 1. reda.

1. *Antidiferenca diskretne funkcije, pomnožene s konstanto:*

$$\Delta^{-1}(C y_x) = C \Delta^{-1} y_x \quad (4.23)$$

2. *Antidiferenca linearne kombinacije diskretnih funkcij je linearna kombinacija antidiferenc:*

$$\Delta^{-1}(C_1 y_x^1 + C_2 y_x^2 + \dots + C_n y_x^n) = C_1 \Delta^{-1} y_x^1 + C_2 \Delta^{-1} y_x^2 + \dots + C_n \Delta^{-1} y_x^n \quad (4.24)$$

3. *Za antidiferenco produkta dveh diskretnih funkcij velja:*

$$\Delta^{-1}(y_x^1 y_x^2) = y_x^1 y_x^2 - \Delta^{-1}(y_{x+1}^1 \Delta y_x^2) \quad (4.25)$$

Opomba: Lastnost (4.25) nekoliko spominja na metodo “per partes” pri računanju nedoločenih integralov zveznih funkcij.

Podobno, kot smo to storili pri nedoločenem integralu zvezne funkcije, zapišimo antidiference nekaterih pogosto uporabljenih diskretnih funkcij v tabelo.

**Tabela: Antidiference nekaterih diskretnih funkcij**

| $y_x = y(x)$   | $\Delta^{-1}y_x$                                              |
|----------------|---------------------------------------------------------------|
| 1              | $x$                                                           |
| $x$            | $\binom{x}{2} = \frac{x!}{2!(x-2)!}$                          |
| $a^x$          | $\frac{a^x}{a-1}, a > 0, a \neq 1$                            |
| $2^x$          | $2^x$                                                         |
| $x^{(n)}$      | $\frac{x^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$                            |
| $(x+a)^{(n)}$  | $\frac{(x+a)^{(n+1)}}{n+1}, n \neq -1$                        |
| $\binom{x}{r}$ | $\binom{x}{r+1}$                                              |
| $\cos(ax+b)$   | $\frac{\sin\left(ax+b-\frac{a}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}$  |
| $\sin(ax+b)$   | $-\frac{\cos\left(ax+b-\frac{a}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}$ |
| $xa^x$         | $\frac{a^x}{a-1}\left(x-\frac{a}{a-1}\right), a \neq 1$       |

Primer:

Izračunajmo antidiferenco diskretne funkcije  $y_x = x^3 + 3x^2 - 2$ .

Rešitev:

Antidiferenco izračunamo tako, da potence najprej pretvorimo v faktorske potence, upoštevamo lastnost linearnosti (4.24) in uporabimo tabelo antidiferenc.

Polinom  $(x^3 + 3x^2 - 2)$  zapišimo s faktorskimi potencami. Pri tem uporabimo Stirlingova števila 2. vrste in dobimo:

$$x^3 + 3x^2 - 2 = (x^{(1)} + 3x^{(2)} + x^{(3)}) + 3(x^{(1)} + x^{(2)}) - 2 = x^{(3)} + 6x^{(2)} + 4x^{(1)} - 2$$

Od tod je

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(x^3 + 3x^2 - 2) &= \Delta^{-1} x^{(3)} + 6x^{(2)} + 4x^{(1)} - 2 = \Delta^{-1} x^{(3)} + 6\Delta^{-1} x^{(2)} + 4\Delta^{-1} x^{(1)} - 2\Delta^{-1} 1 = \\ &= \frac{x^{(4)}}{4} + \frac{6x^{(3)}}{3} + \frac{4x^{(2)}}{2} - 2x = \frac{1}{4}x^{(4)} + 2x^{(3)} + 2x^{(2)} - 2x\end{aligned}$$

Faktorske potence v tem rezultatu pretvorimo v potence z uporabo Stirlingovih števil 1. vrste in dobimo rezultat:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(x^3 + 3x^2 - 2) &= \frac{1}{4}x^{(4)} + 2x^{(3)} + 2x^{(2)} - 2x = \frac{1}{4}(-6x + 11x^2 - 6x^3 + x^4) + \\ &+ 2(2x - 3x^2 + x^3) + 2(-x + x^2) - 2x = \frac{1}{4}(x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x)\end{aligned}$$

◆◆◆

Primer:

Poiščimo antidiferenco funkcije  $y_x = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$ .

Rešitev:

Diskretno funkcijo  $y_x = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$  spet najprej pretvorimo v polinom faktorskih potenc. Ko uporabimo Stirlingova števila druge vrste, dobimo

$$y_x = 2x^{(3)} + 5x^{(2)} + 4x^{(1)} - 5$$

Od tod je:

$$\Delta^{-1}(2x^{(3)} + 5x^{(2)} + 4x^{(1)} - 5) = 2 \cdot \frac{x^{(4)}}{4} + 5 \cdot \frac{x^{(3)}}{3} + 4 \cdot \frac{x^{(2)}}{2} - 5x^{(1)}$$

S pomočjo Stirlingovih števil prve vrste pretvorimo faktorske potence v potence in dobimo rezultat:

$$\Delta^{-1}(2x^3 - x^2 + 3x - 5) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{20}{3}x$$

◆◆◆

Primer:

Preverimo veljavnost relacije:  $\Delta^{-1} \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ r+1 \end{pmatrix}$ .

Rešitev:

Zapis  $\Delta^{-1} \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ r+1 \end{pmatrix}$  je po definiciji antidiference identičen zapisu  $\Delta \begin{pmatrix} x \\ r+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix}$ .

Relacijo sedaj preverimo (in potrdimo) na podoben način, kot smo to storili v primeru za difference.

◆◆◆

## 4.1.4 Operator progresivnega premika

Definicija: Operator progresivnega premika  $E$  povzroči premik argumenta v funkciji za eno enoto (en korak) v desno, to je

$$Ey_x = y_{x+1} \quad (4.26)$$

Premiki neodvisne spremenljivke v diskretni funkciji za ustrezno število korakov v desno definiramo kot zaporedne potence operatorja  $E$ . Premik neodvisne spremenljivke za en korak v desno je  $Ey_x = y_{x+1}$ , premik neodvisne spremenljivke za dva koraka v desno je  $E^2y_x = y_{x+2}$  in tako dalje.

Torej velja:

$$\begin{aligned} E^1 y_x &= Ey_x \\ E^2 y_x &= E(Ey_x) = Ey_{x+1} = y_{x+2} \\ E^3 y_x &= E(E^2 y_x) = Ey_{x+2} = y_{x+3} \\ &\dots\dots\dots \\ E^n y_x &= y_{x+n} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Potenca operatorja  $E$  s potenčnim eksponentom 0 je za premik indiferentna, torej ne povzroči premika, kar zapišemo takole:

$$\begin{aligned} E^0 &= 1 \\ E^0 y_x &= 1 \cdot y_x = y_x \end{aligned} \quad (4.28)$$

Lastnosti operatorja  $E$  sledijo iz definicije (4.26).

1. *Progresivni premik linearne kombinacije*

$$E(C_1 y_x^1 + C_2 y_x^2 + \dots + C_n y_x^n) = C_1 E y_x^1 + C_2 E y_x^2 + \dots + C_n E y_x^n \quad (4.29)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} E(C_1 y_x^1 + C_2 y_x^2 + \dots + C_n y_x^n) &= C_1 y_{x+1}^1 + C_2 y_{x+1}^2 + \dots + C_n y_{x+1}^n = \\ &= C_1 E y_x^1 + C_2 E y_x^2 + \dots + C_n E y_x^n \end{aligned}$$

2. *Progresivni premik faktorske potence*

$$E x^{(n)} = (x+1) x^{(n-1)}, n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (4.30)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} E x^{(n)} &= (x+1)^{(n)} = (x+1)x(x-1)(x-2)\dots(x+1-n+1) = \\ &= (x+1) \cdot \underbrace{x(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1)+1)}_{x^{(n-1)}} = (x+1)x^{(n-1)} \end{aligned}$$

3. *Progresivni premik eksponentne funkcije*

$$E^n a^x = a^n a^x, n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (4.31)$$

Dokaz:

$$E^n a^x = a^{x+n} = a^n a^x$$

4. *Progresivni premik za  $n$  korakov diskretne funkcije, pomnožene z eksponentno funkcijo*

$$E^n (a^x y_x) = a^{x+n} E^n y_x, n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (4.32)$$

Dokaz:

$$E^n (a^x y_x) = a^{x+n} y_{x+n} = a^{x+n} E^n y_x$$

5. Če pomeni  $f(E) = c_m E^m + c_{m-1} E^{m-1} + \dots + c_2 E^2 + c_1 E^1 + c_0$ , potem velja zveza

$$\boxed{f(E)a^x = a^x f(a)} \quad (4.33)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} f(E)a^x &= (c_m E^m + c_{m-1} E^{m-1} + \dots + c_2 E^2 + c_1 E^1 + c_0)a^x = \\ &= c_m a^{x+m} + c_{m-1} a^{x+m-1} + \dots + c_2 a^{x+2} + c_1 a^{x+1} + c_0 a^x = \\ &= a^x \underbrace{(c_m a^m + c_{m-1} a^{m-1} + \dots + c_2 a^2 + c_1 a^1 + c_0)}_{f(a)} = a^x f(a) \end{aligned}$$

Iz definicij operatorjev  $\Delta$  in  $E$  razberemo še tole zvezo, ki je pri računanju z operatorji marsikdaj uporabna :

6.  $\boxed{\Delta = E - 1 \Rightarrow E = \Delta + 1} \quad (4.34)$

Tudi to zvezo dobimo iz definicije prve difference in progresivnega premika.

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = E y_x - y_x = (E - 1)y_x \Rightarrow \Delta = E - 1$$

Primer:

Naj bo  $f(E) = E^3 + 2E^2 - 1$ . Izračunajmo  $f(E)a^x$ .

Rešitev:

$$f(E)a^x = (E^3 + 2E^2 - 1)a^x = E^3 a^x + 2E^2 a^x - a^x = a^3 a^x + 2a^2 a^x - a^x = (a^3 + 2a^2 - 1)a^x$$

◆◆◆

## 4.1.5 Operator retrogradnega premika

Definicija: Operator retrogradnega premika  $E^{-1}$  določa premik neodvisne spremenljivke diskretne funkcije za en korak v levo, to je

$$\boxed{E^{-1}y_x = y_{x-1}} \quad (4.35)$$

Podobno kot pri operatorju progresivnega premika  $E$ , dobimo tudi za operator retrogradnega premika  $E^{-1}$  nekatere lastnosti in povezave.

$$E^{-2}y_x = E^{-1}(E^{-1}y_x) = E^{-1}y_{x-1} = y_{x-2} \quad (4.36)$$

$$E^{-3}y_x = E^{-1}(E^{-2}y_x) = y_{x-3} \quad (4.37)$$

.....

$$E^{-n}y_x = y_{x-n} \quad (4.38)$$

Velja tudi tale zveza med operatorjema  $E$  in  $E^{-1}$ :

$$EE^{-1} = E^{-1}E = 1 \quad (4.39)$$

Iz (4.34) pa sledi še zveza med operatorjem  $E^{-1}$  in antidiferenčnim operatorjem  $\Delta^{-1}$ :

$$\Delta^{-1} = (E - 1)^{-1} \quad (4.40)$$

Lastnosti (4.36) – (4.40) naj za vajo preveri bralec.

## 4.2 DIFERENČNE ENAČBE

Diferenčna enačba je zveza med neznano diskretno funkcijo  $y_x = y(x)$  in njenimi diferencami:

$$f(y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0 \quad (4.41)$$

Najvišji red difference  $n$  določa *red diferenčne enačbe*.

Primer:

Diferenčna enačba  $\Delta^2 y_x - 5\Delta y_x - 3y_x = 0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$  je drugega reda, diferenčna enačba  $y_x - 2\Delta y_x = 0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$  pa prvega reda.

Opomba: Pri diferenčnih enačbah zapišemo vedno še definicijsko območje neodvisne spremenljivke. Zapišemo ga lahko v obliki  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$  ali pa  $X : \{0, 1, 2, \dots\}$ .



Vemo že, da difference lahko izrazimo s funkcijskimi vrednostmi pri  $x, x+1, x+2, x+3, \dots$ . Iz tega razloga zato večinoma diferenčne enačbe pišemo tudi v drugačni obliki. Poglejmo to možnost kar na primeru.

Primer:

Zapišimo diferenčno enačbo drugega reda  $\Delta^2 y_x - 5\Delta y_x - 3y_x = 0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$  v drugačni obliki.

Rešitev:

Po definiciji (4.04) prve difference in (4.17) druge difference velja

$$\begin{aligned}\Delta y_x &= y_{x+1} - y_x \\ \Delta^2 y_x &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x\end{aligned}$$

Ta dva izraza vstavimo v dano diferenčno enačbo

$$\Delta^2 y_x - 5\Delta y_x - 3y_x = (y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x) - 5(y_{x+1} - y_x) - 3y_x = 0$$

Uredimo in dobimo diferenčno enačbo v drugi (običajnejši) obliki:

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 3y_x = 0, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Diferenčno enačbo  $\Delta^2 y_x - 5\Delta y_x - 3y_x = 0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$  bomo pisali v obliki  $y_{x+2} - 7y_{x+1} + 3y_x = 0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .



Opomba: Diferenčne enačbe pri diskretnih funkcijah lahko primerjamo z diferencialnimi enačbami pri zveznih funkcijah. Iz tega vzroka uporabljamo podobne oz. celo enake izraze, ki imajo tudi sicer podoben pomen kot pri diferencialnih enačbah.

Tako je diferenčna enačba lahko *homogena* ali *nehomogena*, glede na koeficiente v diferenčni enačbi pa govorimo o diferenčnih enačbah s *konstantnimi* ali pa z *nekonstantnimi* (variabilnimi) koeficienti.



Diskretno funkcijo, ki zadošča diferenčni enačbi  $n$ -tega reda pri poljubnih *začetnih pogojih*, npr.  $y_0 = C_0, y_1 = C_1, \dots, y_{n-1} = C_{n-1}$ , imenujemo *splošna rešitev* diferenčne enačbe. Če so vrednosti  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  poznane, dobimo *posebno* ali *partikularno rešitev* diferenčne enačbe.

Preden se bomo lotili spoznavanja diferenčnih enačb bolj podrobno, omenimo metodo reševanja diferenčnih enačb, s katero lahko v nekaterih primerih dobimo *posebno rešitev* v obliki *zaporedja*. Gre za iterativno metodo, ki jo bomo opisali in preverili tudi na dveh primerih.

## 4.2.1 Iterativna metoda reševanja diferenčnih enačb

Iterativno metodo lahko uporabimo, če poznamo nekatere začetne vrednosti diskretne funkcije. Če imamo diferenčno enačbo 2. reda, moramo poznati vrednosti pri  $x = 0$  in pri  $x = 1$ , če rešujemo diferenčno enačbo 3. reda, moramo poznati vrednosti funkcije pri  $x = 0$ ,  $x = 1$  in  $x = 3$  itd.

Pri tem postopku ravnamo tako, da iz diferenčne enačbe izrazimo funkcijsko vrednost pri tisti vrednosti neodvisne spremenljivke, ki je najbolj pomaknjena v desno, nato pa v ta izraz zaporedoma vstavljamo vrednosti neodvisne spremenljivke.

### Primer:

Izračunajmo partikularno rešitev diferenčne enačbe  $\Delta^2 y_x - 5\Delta y_x - 3y_x = 0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$  pri danih začetnih pogojih  $y_0 = y(0) = 1$  in  $y_1 = y(1) = 1$ .

### Rešitev:

Diferenčno enačbo  $\Delta^2 y_x - 5\Delta y_x - 3y_x = 0$ , definirano na množici  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , smo že v prejšnjem primeru zapisali v obliki  $y_{x+2} - 7y_{x+1} + 3y_x = 0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

V konkretnem primeru to enačbo zapišemo takole:

$$y_{x+2} = 7y_{x+1} - 3y_x$$

in nato v ta izraz vstavljamo vrednosti za  $x$  z njenega definicijskega območja:

$$y_0=1$$

$$y_1=1$$

$$\text{za } x=0 \Rightarrow y_2=7y_1-3y_0=7 \cdot 1-3 \cdot 1=4$$

$$\text{za } x=1 \Rightarrow y_3=7y_2-3y_1=7 \cdot 4-3 \cdot 1=25$$

$$\text{za } x=2 \Rightarrow y_4=7y_3-3y_2=7 \cdot 25-3 \cdot 4=163$$

... ..

Partikularna rešitev diferenčne enačbe je torej množica  $Y: \{1, 1, 4, 25, 163, \dots\}$ .

◆◆◆

#### Primer:

Z uporabo iterativne metodi poiščimo posebno rešitev enačbe  $y_{x+1} - ay_x = b$ , če poznamo začetni pogoj  $y_0=2$  (opomba: ker gre za diferenčno enačbo 1. stopnje, potrebujemo le en začetni pogoj).

#### Rešitev:

Enačbo zapišemo v obliki  $y_{x+1} = ay_x + b$  in nato delamo iteracije.

$$\text{Poznamo: } y_0=2$$

$$\text{Pri } x=0 \text{ dobimo: } y_1=ay_0+b=2a+b$$

$$\text{pri } x=1 \text{ dobimo: } y_2=ay_1+b=a(2a+b)+b=2a^2+b(1+a)$$

$$\text{pri } x=2 \text{ dobimo: } y_3=ay_2+b=2a^3+b(1+a+a^2)$$

$$\text{pri } x=3 \text{ dobimo: } y_4=ay_3+b=2a^4+b(1+a+a^2+a^3)$$

.....

$$\text{pri } (x-1) \text{ dobimo: } y_x=ay_{x-1}+b=2a^x+b(1+a+a^2+\dots+a^{x-1})=2a^x+\frac{b(a^x-1)}{a-1}$$

$$\text{za } a \neq 1$$

◆◆◆

## 4.2.2 Homogene diferenčne enačbe

Homogena diferenčna enačba se v splošni obliki glasi:

$$\psi_n(x)y_{x+n}+\psi_{n-1}(x)y_{x+n-1}+\dots+\psi_1(x)y_{x+1}+\psi_0(x)y_x=0 \quad (4.42)$$

Koeficienti  $\psi_i(x), i=0,1,2,\dots,n$  v (4.42) so neke znane diskretne funkcije,  $y_x$  pa je iskana diskretna funkcija, torej rešitev diferenčne enačbe.

Povejmo brez dokaza, da za diferenčno enačbo (4.42) velja:

- Če je  $y_x$  rešitev te enačbe, je njena rešitev tudi  $\lambda y_x$ ,  $\lambda \in R$ .
- Naj bosta  $y_x^1$  in  $y_x^2$  dve rešitvi enačbe (4.42). Potem je rešitev te enačbe tudi njuna vsota  $y_x^1 + y_x^2$ .
- Naj bodo funkcije  $y_x^1, y_x^2, y_x^3, \dots, y_x^n$  rešitve enačbe (4.42),  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  pa poljubne konstante. Potem je splošna rešitev diferenčne enačbe (4.42) linearna kombinacija  $y_x = \lambda_1 y_x^1 + \lambda_2 y_x^2 + \dots + \lambda_n y_x^n$ .

#### 4.2.2.1 Homogena diferenčna enačba s konstantnimi koeficienti

Poglejmo si najprej *homogeno diferenčno enačbo s konstantnimi koeficienti*, ki se v splošnem zapisu glasi:

$$b_n y_{x+n} + b_{n-1} y_{x+n-1} + \dots + b_1 y_{x+1} + b_0 y_x = 0 \quad (4.43)$$

Koeficienti  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  so poljubna realna števila.

Rešitev enačbe (4.43) iščemo z *nastavkom*

$$y_x = a^x \quad (4.44)$$

Iz (4.44) sledi zaporedoma:

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= a^{x+1} = a^x a \\ y_{x+2} &= a^{x+2} = a^x a^2 \\ &\dots \\ y_{x+n} &= a^{x+n} = a^x a^n \end{aligned}$$

Če naj bo funkcija  $y_x = a^x$  res rešitev diferenčne enačbe (4.43), mora seveda tej enačbi ustrezati. Zato vstavimo v to enačbo vse vrednosti za  $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}$ :

$$b_n a^x a^n + b_{n-1} a^x a^{n-1} + \dots + b_1 a^x a + b_0 a^x = 0$$

Dobljeni izraz smemo krajšati z  $a^x \neq 0$  in dobimo

$$b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0 = 0 \quad (4.45)$$

Enačbo (4.45) imenujemo (po analogiji z diferencialnimi enačbami) *karakteristična enačba* dane diferenčne enačbe.

Karakteristična enačba je algebrajska enačba  $n$ -te stopnje, zato ima v splošnem  $n$  rešitev, pri čemer nastopajo razne možnosti.

- če je  $a_j$  enkratni realni koren, mu ustreza rešitev diferenčne enačbe

$$y_x^j = C_j a_j^x$$

- če je  $a_j$   $r$ -kratni realni koren, je rešitev diferenčne enačbe

$$y_x = (\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{r-1} x^{r-1}) a_j^x$$

- če je  $a_j$  kompleksni koren (takšni koreni vedno nastopajo v konjugiranih parih), npr.  $a_j = c_j \pm i d_j$ , je rešitev diferenčne enačbe

$$y_x = y_x^{j_1} + y_x^{j_2} = C_{j_1} (c_j + i d_j)^x + C_{j_2} (c_j - i d_j)^x$$

oziroma, če pišemo kompleksno število v polarnih koordinatah, je rešitev:

$$y_x = C_{j_1} r^x (\cos x\varphi + i \sin x\varphi) + C_{j_2} r^x (\cos x\varphi - i \sin x\varphi)$$

- če je  $a_j$   $p$ -kratni kompleksni koren, pa je rešitev diferenčne enačbe

$$y_x = (C_0^{j_1} + C_1^{j_1} x + \dots + C_{p-1}^{j_1} x^{p-1}) r^x (\cos x\varphi + i \sin x\varphi) + \\ + (C_0^{j_2} + C_1^{j_2} x + \dots + C_{p-1}^{j_2} x^{p-1}) r^x (\cos x\varphi - i \sin x\varphi)$$

#### Primer:

Rešimo homogeno linearno diferenčno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti  $y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Poiščimo splošno rešitev te enačbe in njeno partikularno rešitev, če poznamo začetna pogoja  $y_0 = y(0) = 0$  in  $y_1 = y(1) = 1$ .

#### Rešitev:

Splošno rešitev bomo poiskali z nastavkom  $y_x = a^x$ . Na ta način dobimo iz diferenčne enačbe karakteristično enačbo

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

z ničlami/korenoma:  $a_1 = 2$  in  $a_2 = 3$ .

Od tod pa že sledi *splošna rešitev* enačbe:  $y_x = C_1 2^x + C_2 3^x$ .

Posebno (partikularno) rešitev pa lahko dobimo na dva načina:

a) iz splošne rešitve  $y_x = C_1 2^x + C_2 3^x$  z upoštevanjem začetnih pogojev:

$$y_0 = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2$$

$$y_1 = 1 \Rightarrow 1 = 2C_1 + 3C_2$$

Od tod izračunamo  $C_1 = -1$  in  $C_2 = 1$ , tako da je posebna rešitev  $y_x = -2^x + 3^x$ .

b) z iterativno metodo, torej iz enačbe, ki jo rešujemo, najprej napišemo

$$y_{x+2} = 5y_{x+1} - 6y_x$$

in od tod dobimo zaporedne vrednosti diskretne funkcije:

$$y_0 = y(0) = 0$$

$$y_1 = y(1) = 1$$

$$\text{pri } x=0 \text{ dobimo: } y_2 = 5y_1 - 6y_0 = 5$$

$$\text{pri } x=1 \text{ dobimo: } y_3 = 5y_2 - 6y_1 = 19$$

$$\text{pri } x=2 \text{ dobimo: } y_4 = 5y_3 - 6y_2 = 65$$

itd...

Od tod sledi rešitev:  $Y: \{0, 1, 5, 19, 65, \dots\}$ .

◆◆◆

#### Primer:

Poiščimo splošno in posebno rešitev enačbe  $y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$  pri pogojih  $y_0 = 1$  in  $y_1 = 2$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

#### Rešitev:

Gre za isto homogeno diferenčno enačbo, kot v prejšnjem primeru, zato njeno splošno rešitev že poznamo:  $y_x = C_1 2^x + C_2 3^x$ .

Začetna pogoja sta sedaj:  $y_0 = 1$  in  $y_1 = 2$ .

Vstavimo oba pogoja v splošno rešitev in dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$1 = C_1 + C_2$$

$$2 = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 3$$

z rešitvama:  $C_1=1$ ,  $C_2=0$ .

Posebna rešitev diferenčne enačbe se v tem primeru glasi:  $y_x=2^x$ . Za vrednosti neodvisne spremenljivke  $x$  dobimo zaporedoma:  $y_0=1$ ,  $y_1=2$ ,  $y_2=4$ ,  $y_3=8$ ,  $y_4=16, \dots$

Rešimo ta primer še z iterativno metodo.

Ker je  $y_{x+2}-5y_{x+1}+6y_x=0 \Rightarrow y_{x+2}=5y_{x+1}-6y_x$ , dobimo:

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 2$$

$$\text{za } x=0 \text{ je } y_2=5y_1-6y_0=4$$

$$\text{za } x=1 \text{ je } y_3=5y_2-6y_1=8$$

$$\text{za } x=2 \text{ je } y_4=5y_3-6y_2=16$$

$$\text{za } x=3 \text{ je } y_5=5y_4-6y_3=32 \text{ itd....}$$

S tem imamo že znano partikularno rešitev  $Y: \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ .

◆◆◆

Primer:

Rešimo enačbo  $y_{x+2}-2y_{x+1}+3y_x=0$ ,  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Rešitev:

Z uvedbo  $y_x=a^x$  dobimo karakteristično enačbo  $a^2-2a+3=0$  z rešitvama:  $a_{1,2}=1 \pm i\sqrt{2}$ .

Splošna rešitev je

$$y_x = C_1(1+i\sqrt{2})^x + C_2(1-i\sqrt{2})^x$$

Zapišimo to rešitev še s polarnimi koordinatami. Kompleksni števili sta konjugirani, zato imata enako absolutno vrednost  $r = \sqrt{3}$ . Od tod zapišemo

$$y_x = C_1(\sqrt{3})^x (\cos \varphi x + i \sin \varphi x) + C_2(\sqrt{3})^x (\cos \varphi x - i \sin \varphi x)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo posebno rešitev enačbe  $y_{x+2} + y_{x+1} - y_x = 0$  pri pogojih  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ .

Rešitev:

Karakteristična enačba  $a^2 + a - 1 = 0$  ima rešitvi:  $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  in  $a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Splošna rešitev diferenčne enačbe je potem

$$y_x = C_1 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x + C_2 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x$$

Z upoštevanjem obeh začetnih pogojev  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 10$  dobimo dve enačbi  $0 = C_1 + C_2$  in

$$1 = C_1 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ z rešitvama } C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Posebna rešitev je torej

$$y_x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x$$

◆◆◆

#### 4.2.2.2 Homogena diferenčna enačba I. reda s spremenljivima koeficientoma

Homogena diferenčna enačba I. reda s spremenljivima koeficientoma se v splošni obliki glasi:

$$\boxed{\psi_1(x)y_{x+1} - \psi_0(x)y_x = 0, \quad X: \{0, 1, 2, \dots\}} \quad (4.46)$$

Delimo to enačbo s  $\psi_1(x)$ , označimo  $\frac{\psi_0(x)}{\psi_1(x)} = \Psi_0(x)$  in lahko (4.46) zapišemo takole:

$$y_{x+1} - \Psi_0(x)y_x = 0, \quad X: \{0, 1, 2, \dots\}$$

To enačbo najenostavneje rešimo z iteracijsko metodo.

Enačbo zapišimo v obliki  $y_{x+1} = \Psi_0(x)y_x$  in izvajamo iteracije:

$$\text{pri } x=0 \quad \text{je} \quad y_1 = \Psi_0(0)y_0$$

$$\text{pri } x=1 \quad \text{je} \quad y_2 = \Psi_0(1)y_1 = \Psi_0(1)\Psi_0(0)y_0$$

$$\text{pri } x=2 \quad \text{je} \quad y_3 = \Psi_0(2)y_2 = \Psi_0(2)\Psi_0(1)\Psi_0(0)y_0$$

.....

$$\text{pri } (x-1) \quad \text{je} \quad y_x = \Psi_0(x-1) \dots \Psi_0(1)\Psi_0(0)y_0 = \prod_{i=0}^{x-1} \Psi_0(i)y_0$$

Rešitev enačbe (4.46) je torej  $y_x = \prod_{i=0}^{x-1} \Psi_0(i)y_0$ , kjer je  $y_0$  začetna vrednost diskretne funkcije.

## 4.2.3 Nehomogena diferenčna enačba prvega reda s konstantnimi koeficienti

Ta enačba se v splošni obliki glasi:

$$y_{x+1} - by_x = c, \quad X: \{0, 1, 2, \dots\} \quad (4.47)$$

Konstanti  $b$  in  $c$  sta poljubni od nič različni realni števili,  $a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0$ .

Enačbo (4.47) lahko rešimo na več načinov. Omenimo dve možnosti.

### 4.2.3.1 Reševanje z iteracijsko metodo

Enačbo (4.47) prepišemo v obliki

$$y_{x+1} = by_x + c$$

in izvajamo iteracije:

$$\text{za } x=0 \quad \text{je} \quad y_1 = by_0 + c$$

$$\text{za } x=1 \quad \text{je} \quad y_2 = by_1 + c = b^2y_0 + c(1+b)$$

$$\text{za } x=2 \quad \text{je} \quad y_3 = by_2 + c = b^3y_0 + c(1+b+b^2)$$



$$\dots\dots\dots \text{ za } (x-1) \quad \text{ je } \quad \dots\dots\dots y_x = b^x y_0 + c(1+b+b^2+\dots+b^{x-1})$$

Izraz  $(1+b+b^2+\dots+b^{x-1})$  je vsota  $x$  členov geometričnega zaporedja s prvim členom 1 in kvocientom  $b$ . Za  $b \neq 1$  tedaj velja  $(1+b+b^2+\dots+b^{x-1}) = \frac{b^x-1}{b-1}$ . Označimo še  $y_0 = C$  in dobimo splošno rešitev

$$y_x = Cb^x + c \frac{b^x-1}{b-1} = \left[ C + \frac{c}{b-1} \right] b^x + \frac{c}{1-b}$$

Oziroma, če označimo še  $C_1 = C + \frac{c}{b-1}$ , je splošna rešitev enačbe (4.47):

$$y_x = C_1 b^x + \frac{c}{1-b}$$

#### 4.2.3.2 Reševanje s prirejeno homogeno diferenčno enačbo

Nehomogeno diferenčno enačbo (4.47) lahko rešimo po podobnem postopku kot smo reševali nehomogene diferencialne enačbe pri zveznih funkcijah, torej delamo po korakih.

1. Najprej rešimo *prirejeno homogeno enačbo*

$$z_{x+1} - bz_x = 0$$

Vemo, da takšno homogeno diferenčno enačbo rešimo z nastavkom  $z_x = a^x$ .

Karakteristična enačba  $a-b=0$  ima rešitev  $a=b$ , zato je splošna rešitev prirejene homogene enačbe:  $z_x = Cb^x$ .

2. Splošno rešitev nehomogene enačbe dobimo v obliki

$$\boxed{y_x = y_x^1 + Cb^x} \quad (4.48)$$

V (4.48) je  $y_x^1$  neka partikularna rešitev nehomogene enačbe,  $Cb^x$  pa je splošna rešitev prirejene homogene enačbe.

Partikularno rešitev nehomogene enačbe izračunamo z nastavkom

$$y_x^1 = d$$

Ker je  $d$  neko realno število (konstanta), je tudi  $y_{x+1}^1 = d$ . Oboje vstavimo v nehomogeno diferenčno enačbo (4.47)

$$y_{x+1} - by_x = c$$

$$d - bd = c$$

in od tod dobimo neznani  $d$ :

$$d = \frac{c}{1-b}$$

Partikularna rešitev je  $y_x^1 = d = \frac{c}{1-b}$  in zaradi (4.48) je splošna rešitev nehomogene diferenčne enačbe (4.47)

$$y_x = y_x^1 + Cb^x = d + Cb^x = Cb^x + \frac{c}{1-b}$$

in je seveda enaka že izračunani po iterativnem postopku.

#### Primer:

Poiščimo posebno rešitev enačbe  $y_{x+1} - \frac{1}{2}y_x = 2$  pri pogoju  $y_0 = 10$ .

#### Rešitev:

Prirajena homogena diferenčna enačba je  $z_{x+1} - \frac{1}{2}z_x = 0$ . Karakteristična enačba  $a - \frac{1}{2} = 0$  ima rešitev  $a = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ . Splošna rešitev je  $y_x = y_x^1 + C\left(\frac{1}{2}\right)^x = y_x^1 + C \cdot 2^{-x}$ . Partikularno rešitev  $y_x^1$  dobimo z nastavkom  $y_x^1 = d$ . Ker je  $d$  konstanta, je tudi  $y_{x+1}^1 = d$ . Iz prvotne enačbe potem sledi:  $y_{x+1} - \frac{1}{2}y_x = 2 \Rightarrow d - \frac{1}{2}d = 2 \Rightarrow d = 4$ .

Iskana splošna rešitev naše diferenčne enačbe je  $y_x = C \cdot 2^{-x} + 4$ .

Še posebna rešitev za dani začetni pogoj  $x=0, y_0=10$ :

$$y_x = C \cdot 2^{-x} + 4$$

$$10 = C \cdot 2^0 + 4 \Rightarrow C = 6$$

Zato je posebna rešitev v tem primeru takšna:  $y_x = 6 \cdot 2^{-x} + 4$ .

◆◆◆

## 4.2.4 Reševanje diferenčnih enačb z operatorji

Diferenčne enačbe je mogoče reševati tudi z operatorji, ki smo jih spoznali v prejšnjih poglavjih.

Vzemimo linearno diferenčno enačbo reda  $n$  s konstantnimi koeficienti, ki je definirana na množici  $X: \{0, 1, 2, \dots\}$ :

$$b_n y_{x+n} + b_{n-1} y_{x+n-1} + \dots + b_1 y_{x+1} + b_0 y_x = g(x) \quad (4.49)$$

Ko je v (4.49) funkcija na desni strani enačbe identično enaka nič ( $g(x) \equiv 0$ ), je ta enačba homogena, če pa ni, je enačba nehomogena.

V nadaljevanju si bomo ogledali obe možnosti.

V enačbi (4.49) najprej uporabimo operator progresivnega premika  $E$ , ki smo ga definirali z izrazom (4.26). Zaradi lastnosti tega operatorja moremo enačbo (4.49) zapisati takole

$$b_n E^n y_x + b_{n-1} E^{n-1} y_x + \dots + b_1 E y_x + b_0 y_x = g(x)$$

oziroma

$$(b_n E^n + b_{n-1} E^{n-1} + \dots + b_1 E + b_0) y_x = g(x)$$

Ko označimo

$$f(E) = b_n E^n + b_{n-1} E^{n-1} + \dots + b_1 E + b_0 \quad (4.50)$$

lahko diferenčno enačbo (4.49) zapišemo v enostavnejši obliki:

$$f(E) y_x = g(x) \quad (4.51)$$

### 4.2.4.1 Homogena linearna diferenčna enačba

Homogena linearna diferenčna enačba reda  $n$  s konstantnimi koeficienti se glasi

$$b_n y_{x+n} + b_{n-1} y_{x+n-1} + \dots + b_1 y_{x+1} + b_0 y_x = 0 \quad (4.52)$$

V tej enačbi uporabimo operator progresivnega premika  $E$  in jo zapišemo v obliki:

$$\boxed{f(E)y_x = 0} \quad (4.53)$$

Ko homogeno diferenčno enačbo s konstantnimi koeficienti rešujemo z nastavkom  $y_x = a^x$ , dobimo karakteristično enačbo

$$b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0 = 0$$

To enačbo pa zaradi (4.50) lahko zapišemo tudi takole:

$$f(a) = 0$$

Ko (4.54) razcepimo, torej  $f(a) = b_n(a-a_1)(a-a_2)\dots(a-a_n) = 0$ , vidimo, da lahko zapišemo za  $a = E$  tole:

$$f(E) = b_n(E-a_1)(E-a_2)\dots(E-a_n)$$

To pa pomeni, da je mogoče homogeno diferenčno enačbo (4.53) zapisati v obliki:

$$\boxed{(E-a_1)(E-a_2)\dots(E-a_n)y_x = 0} \quad (4.54)$$

Enačbo (4.54) sedaj pišemo v obliki sistema enačb

$$\begin{aligned} (E-a_1)y_x &= 0 \\ (E-a_2)y_x &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ (E-a_n)y_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Sistem (4.55) zaradi (4.54) predstavlja nabor linearnih karakterističnih enačb, iz katerih dobimo korene  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Vsaka od teh rešitev nam da po eno partikularno rešitev diferenčne enačbe, splošna rešitev diferenčne enačbe pa je njihova linearna kombinacija

$$\boxed{y_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x + \dots + C_n a_n^x} \quad (4.56)$$

Primer:

Rešimo homogeno diferenčno enačbo  $y_{x+3} - 6y_{x+2} + 11y_{x+1} - 6y_x = 0$  z operatorjem progresivnega premika.

Rešitev:

Ko v dani diferenčni enačbi uporabimo operator progresivnega premika  $E$  ter upoštevamo njegove lastnosti, dobimo

$$(E^3 - 6E^2 + 11E - 6)y_x = 0 \quad \text{oziroma} \quad (E-1)(E-2)(E-3)y_x = 0$$

Od tod sledi sistem

$$(E-1)y_x = 0$$

$$(E-2)y_x = 0$$

$$(E-3)y_x = 0$$

ki nam da tri karakteristične enačbe z rešitvami:

$$a-1=0 \Rightarrow a_1=1, a-2=0 \Rightarrow a_2=2, a-3=0 \Rightarrow a_3=3$$

Splošna rešitev dane homogene diferenčne enačbe je potem

$$y_x = C_1 + C_2 \cdot 2^x + C_3 \cdot 3^x$$

◆◆◆

#### 4.2.4.2 Nehomogena linearna diferenčna enačba

Ko v nehomogeni linearni diferenčni enačbi

$$b_n y_{x+n} + b_{n-1} y_{x+n-1} + \dots + b_1 y_{x+1} + b_0 y_x = g(x), \quad g(x) \neq 0 \quad (4.57)$$

uporabimo operator progresivnega premika, jo zapišemo v obliki (4.51) oziroma takole:

$$b_n (E-a_1)(E-a_2) \dots (E-a_n) y_x = g(x) \quad (4.58)$$

Obe strani enačbe (4.58) delimo s konstantnim, od nič različnim koeficientom  $b_n$  in jo nato zaporedoma prenumerando množimo najprej z  $(E-a_1)^{-1}$ , nato z  $(E-a_2)^{-1}$  itd., na koncu pa še z  $(E-a_n)^{-1}$ . Na ta način dobimo splošno rešitev diferenčne enačbe (4.57):

$$y_x = \frac{1}{b_n} (E-a_n)^{-1} (E-a_{n-1})^{-1} \dots (E-a_1)^{-1} g(x) \quad (4.59)$$

Od tu naprej pa delamo tako, kot smo ugotovili v prejšnjem poglavju.

V (4.59) uporabimo še tole zvezo, ki jo navedimo brez dokaza

$$\boxed{(E-a)^{-1} = a^{x-1} \Delta^{-1} a^{-x}} \quad (4.60)$$

Primer: Rešimo nehomogeno diferenčno enačbo  $2y_{x+2} - 7y_{x+1} + 3y_x = -5$ .

Rešitev: Diferenčno enačbo bomo reševali po zgoraj opisanem postopku. V tej enačbi uporabimo operator  $E$  in enačba se glasi

$$\begin{aligned} (2E^2 - 7E + 3)y_x &= -5 \\ 2\left(E^2 - \frac{7}{2}E + \frac{3}{2}\right)y_x &= -5 \end{aligned}$$

Enačbo delimo z 2 in izraz na levi strani razstavimo

$$\left(E - \frac{1}{2}\right)(E - 3)y_x = -\frac{5}{2}$$

Zgornji izraz prenumerando pomnožimo najprej z  $\left(E - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ , nato pa še z  $(E - 3)^{-1}$  in dobimo formalno rešitev diferenčne enačbe za tale primer

$$y_x = (E - 3)^{-1} \left(E - \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)$$

V tej enačbi upoštevajmo najprej lastnost (4.60) za  $a=3$  in za  $a=\frac{1}{2}$ :

$$(E - 3)^{-1} = 3^{x-1} \Delta^{-1} 3^{-x}$$

$$\left(E - \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Delta^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^{-x+1} \Delta^{-1} 2^x.$$

in dobimo

$$y_x = 3^{x-1} \Delta^{-1} 3^{-x} \cdot 2^{-x+1} \Delta^{-1} 2^x \cdot \left(-\frac{5}{2}\right).$$

Antidiferenco eksponentne funkcije najdemo v tabeli antidiferenc. Upoštevajmo torej antidiferenco  $\Delta^{-1}a^x = \frac{a^x}{a-1} + K$ ,  $a \neq 1$ , kar za  $a=2$  pomeni  $\Delta^{-1}2^x = 2^x + K_1$ .

Od tod je :

$$\begin{aligned} y_x &= \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3^{x-1} \cdot \Delta^{-1} 3^{-x} \cdot 2^{-x+1} \cdot (2^x + K_1) = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3^{x-1} \Delta^{-1} 3^{-x} (2 + 2K_1 2^{-x}) = \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3^{x-1} \Delta^{-1} (2 \cdot 3^{-x} + C_1 6^{-x}) \end{aligned}$$

Pri tem smo označili konstanto  $C_1 = 2K_1$ . Sedaj enačbo še preuredimo:

$$y_x = \left(-\frac{5}{2}\right) 3^{x-1} \Delta^{-1} \left[ 2 \left(\frac{1}{3}\right)^x + C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^x \right] = \left(-\frac{5}{2}\right) 3^{x-1} \left[ 2 \Delta^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^x + C_1 \Delta^{-1} \left(\frac{1}{6}\right)^x \right]$$

V oglatem oklepaju ponovno upoštevajmo pomen operatorja  $\Delta^{-1}$  in dobimo:

$$y_x = \left(-\frac{5}{2}\right) 3^{x-1} \left[ 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{-\frac{2}{3}} + C_1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^x}{-\frac{5}{6}} + K_2 \right] = \left(-\frac{5}{2}\right) 3^{x-1} \left[ -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{6}{5} C_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x + K_2 \right]$$

Izraz le še uredimo in če označimo krajše še  $C_2 = -\frac{5K_2}{6}$ , že imamo splošno rešitev nehomogene diferenčne enačbe:

$$y_x = \frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-x} + C_2 \cdot 3^x$$

Za vajo preverimo, če je dobljena funkcija res rešitev diferenčne enačbe. V ta namen moramo v enačbo  $2y_{x+2} - 7y_{x+1} + 3y_x = -5$  vstaviti vrednosti funkcij

$$\begin{aligned} y_x &= \frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-x} + C_2 \cdot 3^x \\ y_{x+1} &= \frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-(x+1)} + C_2 \cdot 3^{x+1} \\ y_{x+2} &= \frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-(x+2)} + C_2 \cdot 3^{x+2} \end{aligned}$$

in preveriti, če je leva stran enačbe res enaka desni.

V enačbo  $2y_{x+2} - 7y_{x+1} + 3y_x = -5$  vstavimo izračunane  $y_x$ ,  $y_{x+1}$  in  $y_{x+2}$  in preverimo, če je leva stran enačbe enaka desni strani.

$$2y_{x+2} - 7y_{x+1} + 3y_x = -5$$

$$2\left[\frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-(x+2)} + C_2 \cdot 3^{x+2}\right] - 7\left[\frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-(x+1)} + C_2 \cdot 3^{x+1}\right] + 3\left[\frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-x} + C_2 \cdot 3^x\right] = -5$$

$$2\left[\frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-(x+2)} + C_2 \cdot 3^{x+2}\right] - 7\left[\frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-(x+1)} + C_2 \cdot 3^{x+1}\right] + 3\left[\frac{5}{2} + C_1 \cdot 2^{-x} + C_2 \cdot 3^x\right] = -5$$

$$5 + \frac{1}{2}C_1 2^{-x} + 18C_2 3^x - \frac{35}{2} - \frac{7}{2}C_1 2^{-x} - 21C_2 3^x + \frac{15}{2} + 3C_1 2^{-x} + 3C_2 \cdot 3^x = -5$$

$$-5 = -5$$

Leva in desna stran enačbe sta res enaki, torej je izračunana rešitev pravilna.

◆◆◆

## 4.3 Z - TRANSFORMACIJA

### 4.3.1 Definicija z-transformacije

Pri zveznih funkcijah smo definirali Fourierovo in Laplaceovo transformacijo in ugotovili, da sta zeko uporabni pri reševanju *diferencialnih enačb*.

Zvezno funkcijo realne spremenljivke smo z dogovorjenim pravilom pretvorili v zvezno funkcijo kompleksne spremenljivke. Računske operacije višje matematike, zlasti odvod, ki jih opravljamo v obsegu realnih števil, so v kompleksnem območju sedaj postale mnogo enostavnejše.

Namesto odvoda smo dobili potenco, tako da diferencialna enačba preide v navadno algebrsko enačbo, namesto konvolucijskega integrala dobimo produkt transformov itd.

Podoben možnost se pokaže tudi v diskretni analizi. Tudi tu moremo diskretno funkcijo realne spremenljivke pretvoriti v diskretno funkcijo kompleksne spremenljivke. Temu postopku bomo rekli z-transformacija. Z njeno uporabo bomo lahko veliko enostavneje reševali diferenčne enačbe.



Definicija: Vzemimo neko diskretno funkcijo  $f_k = f(k)$ ,  $k \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Funkcijo, določeno z izrazom

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.61)$$

imenujemo **z-transform** dane diskretne funkcije. Za z-transformacijo običajno uporabimo zapis:

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z) \quad (4.62)$$

$\mathcal{Z}$  je operator, ki preslika diskretno realno funkcijo  $f(k)$  v kompleksno funkcijo  $F(z)$ :

$$\mathcal{Z}: f(k) \rightarrow F(z)$$

Če je diskretna funkcija  $f(k)$  definirana samo za nenegativne neodvisne spremenljivke, torej za  $k \geq 0$ , govorimo o *desnostrani diskretni funkciji*.

Če je diskretna funkcija  $f(k)$  definirana samo za negativne vrednosti neodvisne spremenljivke, torej za  $k < 0$ , govorimo o *levostrani diskretni funkciji*.

Ko pa je diskretna funkcija (v tehniki pravimo tudi: signal)  $f(k)$  definirana za vse cele vrednosti neodvisne spremenljivke  $k$ , govorimo o *obojestrani diskretni funkciji*.

V konkretnih realnih primerih imamo večinoma opraviti samo z desnostrano diskretno funkcijo, zato se bomo v nadaljevanju posvetili le tako imenovani *enostrani z-transformaciji*.

Definicija: Enostrana z-transformacija je postopek, ki diskretni funkciji  $f_k = f(k)$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  priredi **enostrani z-transform**

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.64)$$

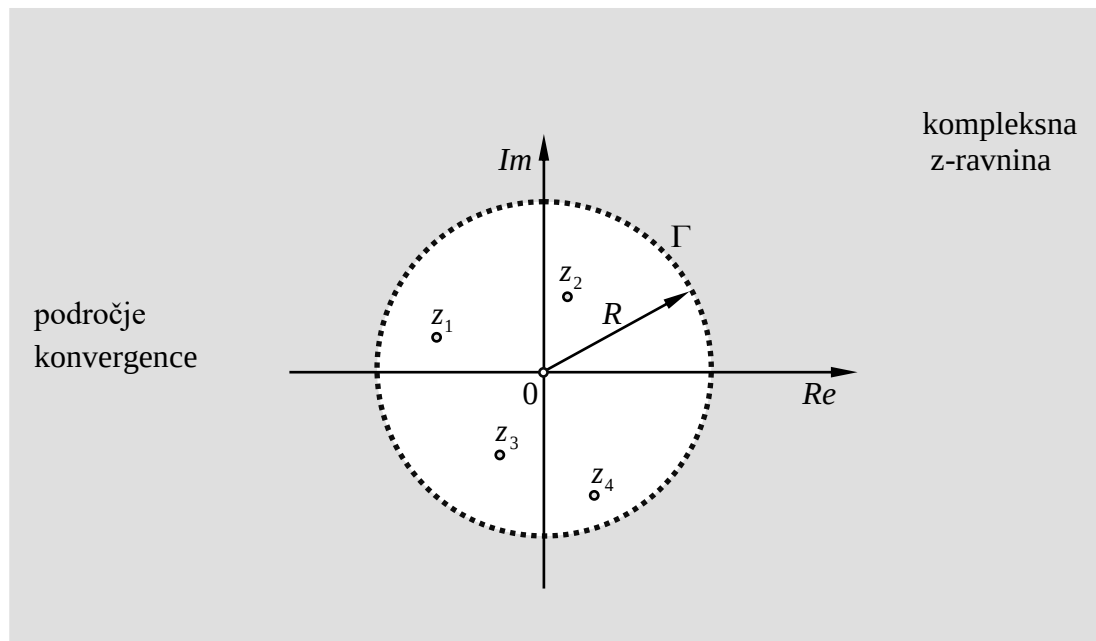
Funkcija  $F(z)$  je vrsta, ki konvergira za vsako kompleksno število  $z$ , za katerega velja zahteva  $|z| > R = \frac{1}{\rho}$ , kjer je  $\rho$  konvergenčni polmer (slika 4.1).

Funkcija (4.64) je vrsta

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \dots = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \dots,$$

konvergentna za vse tiste absolutne vrednosti kompleksne spremenljivke, ki ležijo znotraj konvergenčnega kroga s krožnico  $\Gamma$ , ki je množica točk z enačbo  $|z| = \Gamma$ . Na krivulji  $\Gamma$  vrsta ni konvergentna.

Krog konvergence je prikazan na sliki (4.1). Z znakom  $\Gamma$  je označena krožnica, ki loči področje konvergence od področja divergence. Poli funkcije  $F(z)$  so v področju divergence, torej znotraj kroga z radijem  $R$  (slika 4.1).



Slika 4.1 Konvergenca funkcije  $F(z)$

Enostrani z-transform  $F(z)$  je torej vrsta

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \frac{f(4)}{z^4} + \dots \quad (4.65)$$

Pomembno: Ko računamo transform  $F(z)$ , moramo *vedno preveriti območje divergence*.

Vzemimo desnostrano z-transformacijo (4.64) in jo pomnožimo s faktorjem  $z^{k-1}$ , dobljeni produkt pa integrirajmo po poljubni sklenjeni krivulji  $\Gamma$ , ki naj obkroža vse singularnosti (pole) funkcije  $F(z)$ :

$$\oint_{\Gamma} z^{k-1} F(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{\Gamma} f(k) z^{-1} dz \quad (4.66)$$

Če za to krivuljo vzamemo krožnico, kar smemo storiti brez škode za splošnost, dobimo situacijo s slike (4.1). V formuli (4.66) smo zaradi enakomerne konvergence v (4.64) zamenjali vrstni red sumiranja in integriranja. Iz (4.66) sledi

$$\oint_{\Gamma} z^{k-1} F(z) dz = 2\pi i f(k)$$

Od tod dobimo formulo za **inverzno z-transformacijo**

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}, k=0,1,2,\dots \quad (4.67)$$

Vemo, da integral v (4.67) izračunamo po Cauchyjevi formuli kot vsoto vseh residuov:

$$\oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz = 2\pi i \sum_{\text{Res}} \text{Res}[F(z) z^{k-1}] \quad (4.68)$$

Iz (4.67) in (4.68) dobimo formulo za inverzno z-transformacijo, izraženo z residui:

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \sum_{\text{Res}} \text{Res}[F(z) z^{k-1}], \quad k=0,1,2,\dots \quad (4.69)$$

V konkretnih primerih, ko želimo iz z-transforma  $F(z)$  dobiti originalno funkcijo  $f(k)$  v realnem območju, praviloma ni potrebno uporabljati formule (4.67) oziroma (4.69), ker lahko na podoben način kot pri Fourierovi in Laplaceovi transformaciji transforme konkretnih diskretnih funkcij dobimo kar iz tabele.

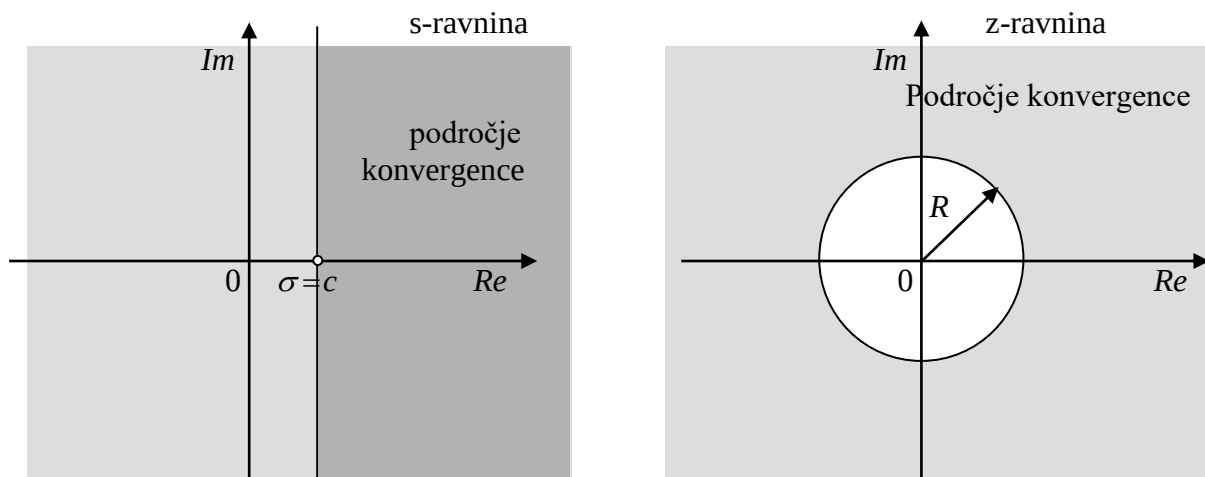
### 4.3.2 Zveza med Laplaceovo in z-transformacijo

Zveza med z-transformacijo in Laplaceovo transformacijo je podana s preslikavo s-ravnine na z-ravnino s pravilom:

$$z = e^{st} = e^{(\sigma + i\omega)t} = e^{\sigma t} e^{i\omega t} \quad (4.70)$$

S to preslikavo se preslika konvergenčna abscisa  $c$  na konvergenčno krožnico z radijem  $|z|=e^{ct}=R$ . Področje konvergence  $s$ -ravnine, za katero je  $\sigma > \text{Re}(s)$  in s tem  $e^{\sigma t} > R$ , se preslika v zunanost konvergenčnega kroga. Področje  $s$ -ravnine, za katero velja  $\sigma < \text{Re}(s)$ , pa se preslika v notranjost kroga konvergence, ker je  $e^{\sigma t} < R$  za vse  $\sigma < \text{Re}(s)$ .

V posebnem primeru, ko je  $c=0$  (ordinatna os), je konvergenčni krog kar krog enote ( $R=1$ ). V tem primeru se desna polravnina  $s$ -ravnine preslika v zunanost enotskega kroga, leva polravnina  $s$ -ravnine pa se preslika v notranjost enotskega kroga (slika 4.2)



Slika 4.2: Zveza med področjem konvergence pri Laplaceovi in z-transformaciji

#### Primer:

Določimo enostrani z-transform  $F(z)$  za diskretno funkcijo  $f(k) = 1, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$

#### Rešitev:

Enostrani z-transform dane diskretne funkcije je po definiciji (4.65):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 \cdot z^{-k}) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

Dobili smo geometrično vrsto s prvim členom  $a_1 = 1$  in kvocientom  $q = \frac{1}{z}$ . Ta vrsta je

konvergentna, ko je  $|q| < 1$ , njeno vrednost pa dobimo po formuli  $S = \frac{a_1}{1-q}$ . Če je torej za

dano funkcijo izpolnjen pogoj  $\left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$ , se njen z-transform glasi:

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Področje konvergence dane vrste je torej zunanost kroga z radijem  $R=1$  v kompleksni z-ravnini.

Za vsa kompleksna števila, katerih velikost je manjša od 1, vrsta ni konvergentna, za vsa kompleksna števila z absolutno vrednostjo več kot 1, pa je konvergentna in izračunani z-transform obstaja.

Če je npr.  $z = -1 + i$ , je  $|z| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1$  in je vrsta konvergentna, če pa je  $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}i$ , je zaradi  $|z| = \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{5}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{61}{100}} \approx 0,78 < 1$  vrsta divergentna.

◆◆◆

#### Primer:

Določimo z transform funkcije  $f(k) = n$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  in preverimo konvergenco te vrste za kompleksna števila:  $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$ ,  $z_2 = 1 - 2i$  in  $z_3 = 1 + \frac{1}{2}i$ .

#### Rešitev:

Po definiciji z-transformacija velja za funkcijo  $f(k) = n$ :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} n \cdot z^{-k} = n \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$

Vrsta  $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$  je geometrična, njena vrednost je  $\frac{z}{z-1}$  za vse  $|z| > 1$ . Od tod sledi:

$$F(z) = n \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = n \cdot \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

Za dana kompleksna števila ugotovimo:

$$\text{a) } |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{6} \approx 0,6 < 1, \text{ vrsta ni konvergentna}$$

$$\text{b) } |z_2| = \sqrt{5} > 1, \text{ vrsta je konvergentna}$$

$$\text{c) } |z_3| = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1, \text{ vrsta je konvergentna.}$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo enostrani z-transform diskretne eksponentne funkcije  $f(k)=e^{akT}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Rešitev:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{aT}}{z}\right)^k = 1 + \frac{e^{aT}}{z} + \left(\frac{e^{aT}}{z}\right)^2 + \left(\frac{e^{aT}}{z}\right)^3 + \dots$$

Spet gre za geometrično vrsto s prvim členom 1 in kvociantom  $\frac{e^{aT}}{z}$ . Takšna vrsta je konvergentna, ko je izpolnjen pogoj:

$$\left| \frac{e^{aT}}{z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > e^{aT}$$

Tedaj je  $\mathcal{Z}\{e^{akT}\} = \frac{z}{z - e^{aT}}$ .

Če v zgornji formuli vzamemo  $T = 1$ , dobimo še tale transform:

$$\mathcal{Z}\{e^{ak}\} = \frac{z}{z - e^a}.$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo enostrani z-transform diskretne funkcije  $f(k) = a^k$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $a > 0$ .

Rešitev:

Po definiciji velja  $F(z) = \mathcal{Z}\{a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$ . Ta vrsta je konvergentna, ko je izpolnjen

pogoj  $\left| \frac{a}{z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$ . Tedaj se z-transform glasi:

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z - a} \text{ za } |z| > |a|$$

◆◆◆

Primer:

Izračunajmo enostrani z-transform funkcije  $f(k) = k a^k$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $a > 0$ .

Rešitev:

Iz prejšnjega primera vemo, da za vse  $|z| > |a|$  velja  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a}$ . Odvajajmo levo in desno stran te enačbe po spremenljivki  $z$ :

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-a} \right)$$

in dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a^k z^{-k-1} \cdot (-k)) = \frac{(z-a) - z}{(z-a)^2}$$

Uredimo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a^k z^{-k-1} \cdot (-k)) &= \frac{-a}{(z-a)^2} \\ -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} k a^k z^{-k} &= \frac{-a}{(z-a)^2} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a^k z^{-k} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

Po definiciji  $z$ -transformacije (4.64) je  $\mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$ . Vidimo, da je leva stran zgornje enačbe ravno iskani  $z$ -transform funkcije  $f(k) = ka^k$ , torej velja:

$$\mathcal{Z}\{ka^k\} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

Če v zgornji formuli vzamemo za  $a = 1$ , dobimo še tole formulo:

$$\mathcal{Z}\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

◆◆◆

### 4.3.3 Lastnosti $z$ -transformacije

Tudi za  $z$ -transformacijo lahko ugotovimo nekaj lastnosti, ki jih uporabljamo v praktičnih primerih. Vse lastnosti izpeljemo iz definicije enostrane  $z$ -transformacije (4.64), lahko pa jih posplošimo tudi za dvostrano  $z$ -transformacijo (4.61).

## 1. Linearnost

Z-transformacija linearne kombinacije diskretnih funkcij je linearna kombinacija posameznih z-transformacij:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\alpha_1 f_1(k) + \alpha_2 f_2(k) + \dots + \alpha_n f_n(k)\} = \\ = \alpha_1 \mathcal{Z}\{f_1(k)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}\{f_2(k)\} + \dots + \alpha_n \mathcal{Z}\{f_n(k)\} \end{aligned} \quad (4.71)$$

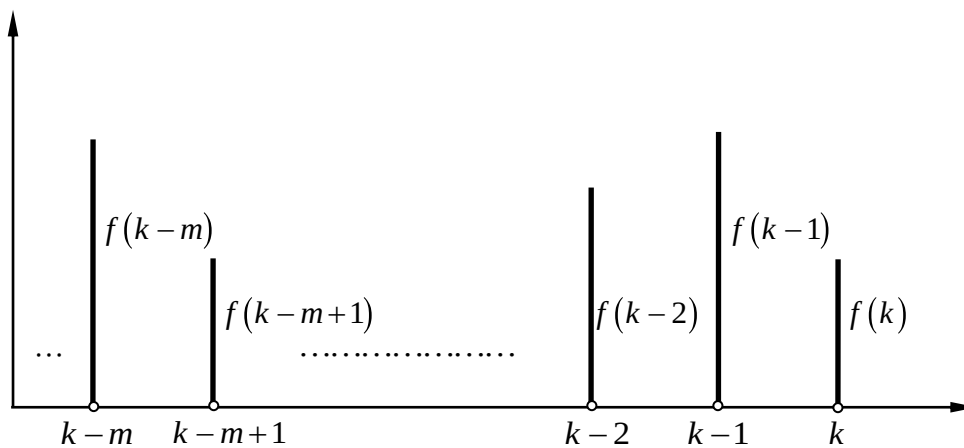
Dokaz formule (4.71) sledi iz lastnosti vsote (vrste).

Na enak način, kot ugotovimo linearnost z-transformacije, ugotovimo tudi linearnost inverzne z-transformacije:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\{\alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z) + \dots + \alpha_n F_n(z)\} = \\ = \alpha_1 \mathcal{Z}^{-1}\{F_1(z)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}^{-1}\{F_2(z)\} + \dots + \alpha_n \mathcal{Z}^{-1}\{F_n(z)\} \end{aligned} \quad (4.71a)$$

## 2. Paralelni premik diskretne funkcije v levo

Paralelni premik diskretne funkcije v levo lahko predstavimo v koordinatnem sistemu (slika 4.3).



Slika 4.3: Premik funkcije  $f(k)$  v levo

Brez dokaza povejmo, da za premik v levo velja

$$\mathcal{Z}\{f(k-m)\} = z^{-m} \mathcal{Z}\{f(k)\} + \sum_{i=0}^{m-1} f(i-m) z^{-i} \quad (4.72)$$



Za posamezne premike v levo dobimo naslednje uporabne formule:

- za  $m = 1$  (premik v levo za eno enoto)

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{f(k)\} + f(-1) \quad (4.73)$$

- za  $m = 2$  (premik v levo za dve enoti)

$$\mathcal{Z}\{f(k-2)\} = z^{-2}\mathcal{Z}\{f(k)\} + f(-2) + f(-1)z^{-1} \quad (4.74)$$

- za  $m = 3$  (premik v levo za tri enote)

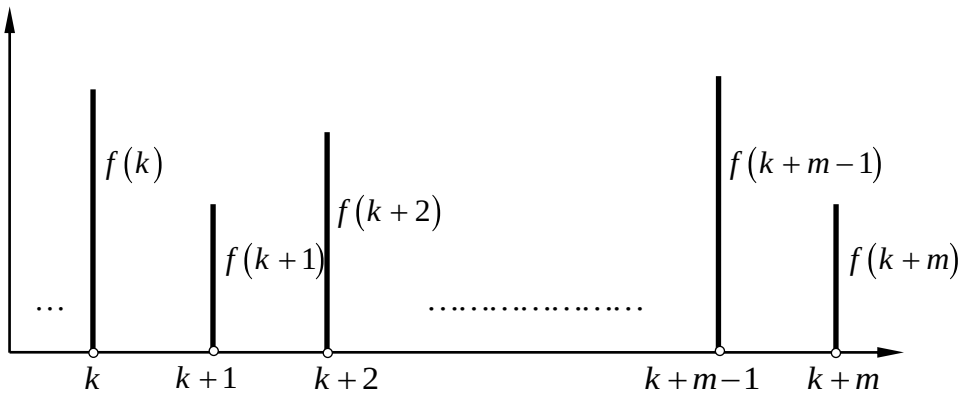
$$\mathcal{Z}\{f(k-3)\} = z^{-3}\mathcal{Z}\{f(k)\} + f(-3) + f(-2)z^{-1} + f(-1)z^{-2} \quad (4.75)$$

V konkretnih praktičnih primerih lahko dosežemo, da je vrednost diskretne funkcije povsod enaka nič, torej  $f(k) = 0$  za vsak  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Tedaj iz formule (4.72) sledi:

$$\mathcal{Z}\{f(k-m)\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{f(k)\} \quad (4.76)$$

### 3. Paralelni premik diskretne funkcije v desno

Tudi paralelni premik v desno si grafično predstavimo v koordinatnem sistemu.



Slika 4.4: Premik funkcije  $f(k)$  v desno

Brez dokaza povejmo, da za premik v desno velja naslednja lastnost

$$\mathcal{Z}\{f(k+m)\} = z^m \mathcal{Z}\{f(k)\} - \sum_{i=0}^{m-1} f(i) z^{m-i} \quad (4.77)$$

Za posamezne premike v desno dobimo naslednje formule:

- za  $m = 1$  (premik v desno za eno enoto):

$$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = z \cdot \mathcal{Z}\{f(k)\} - zf(0) \quad (4.78)$$

- za  $m = 2$  (premik v desno za dve enoti)

$$\mathcal{Z}\{f(k+2)\} = z^2 \mathcal{Z}\{f(k)\} - z^2 f(0) - zf(1) \quad (4.79)$$

- za  $m = 3$  (premik v desno za tri enote)

$$\mathcal{Z}\{f(k+3)\} = z^3 \mathcal{Z}\{f(k)\} - z^3 f(0) - z^2 f(1) - zf(2) \quad (4.80)$$

Če je vrednost diskretne funkcije povsod enaka nič, torej  $f(k) = 0$  za vsak  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , iz formule (4.77) sledi:

$$\mathcal{Z}\{f(k+m)\} = z^m \mathcal{Z}\{f(k)\} \quad (4.81)$$

#### 4. z-transformacija konvolucijske vsote

Konvolucijska vsota dveh diskretnih funkcij je tale izraz

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k) f_2(k-i) \quad (4.82)$$

oziroma

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k-i) f_2(k) \quad (4.83)$$

Z-transformacija konvolucijske vsote pokaže še tole zanimivo in zlasti uporabno lastnost:

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k)f_2(k-i)\right\} = \mathcal{Z}\{f_1(k)\} \cdot \mathcal{Z}\{f_2(k)\} = F_1(z)F_2(z) \quad (4.84)$$

Dokaz:

Po definiciji enostrane z-transformacije je

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k)f_2(k-i)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} f_1(k)f_2(k-i) \right) z^{-k}$$

Potenco  $z^{-k}$  pišimo takole:  $z^{-i}z^{-(k-i)}$ , označimo še  $n = (k-i)$ . Za vse takšne  $z$ , za katere je vrsta konvergentna, lahko zamenjamo vrstni red sumiranja, tako da je tole res:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k)f_2(k-i)\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} f_1(k)f_2(k-i) \right) z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} f_1(k)f_2(k-i) \right) z^{-i} z^{-(k-i)} = \sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) z^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} f_2(n) z^{-n} = \\ &= \mathcal{Z}\{f_1(i)\} \cdot \mathcal{Z}\{f_2(n)\} = F_1(z)F_2(z) \end{aligned}$$

### 5. z-transformacija produkta diskretne funkcije z eksponentno funkcijo

Vzemimo poljubno diskretno funkcijo  $f(k)$  in eksponentno funkcijo  $a^k, a > 0$  ter tvorimo produkt  $a^k f(k)$ . Z-transformacija tega produkta je po definiciji

$$\mathcal{Z}\{a^k f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ f(k) \cdot \left( \frac{z}{a} \right)^{-k} \right] = F\left( \frac{z}{a} \right)$$

Za poljubno pozitivno realno število  $a$  torej velja

$$\mathcal{Z}\{a^k f(k)\} = F\left( \frac{z}{a} \right), a > 0 \quad (4.85)$$

6. Izrek o začetni vrednosti

Če je funkcija  $f(k)$  desnostrana diskretna funkcija, torej če velja  $f(k) = 0$  za  $k < 0$ , in če eksistira njena enostrana z-transformacija  $F(z)$ , potem velja

$$\boxed{f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)} \quad (4.86)$$

Dokaz: Zaradi  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$  je res

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \dots \right) = f(0)$$

7. Izrek o končni vrednosti

Če je diskretna funkcija  $f(k)$  desnostrana, torej če je  $f(k) = 0$  za  $k < 0$  in če eksistira njena enostrana z-transformacija  $F(z)$  tako, da so vsi poli funkcije znotraj enotskega kroga, je njena vrednost v neskončnosti (stacionarna vrednost):

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \right) F(z)} \quad (4.87)$$

Dokaz:

Za funkcijo  $(f(k+1) - f(k))$  lahko zapišemo z-transformacijo direktno po definiciji in z uporabo pravila (4.78):

$$\mathcal{Z}\{(f(k+1) - f(k))\} = \sum_{k=0}^{\infty} (f(k+1) - f(k))z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\{(f(k+1) - f(k))\} = zF(z) - z f(0) - F(z)$$

Če obe enačbi delimo z  $z \neq 0$ , dobimo

$$\frac{1}{z} \mathcal{Z}\{(f(k+1) - f(k))\} = \sum_{k=0}^{\infty} (f(k+1) - f(k))z^{-(k+1)}$$

$$\frac{1}{z} \mathcal{Z}\{(f(k+1) - f(k))\} = \frac{z-1}{z} F(z) - f(0)$$

Izraza na levih straneh obeh enačb sta enaka, zato sta seveda enaka tudi izraza na desnih straneh, torej velja

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f(k+1) - f(k)) z^{-(k+1)} = \frac{z-1}{z} F(z) - f(0)$$

Gornji izraz limitiramo, ko gre  $z \rightarrow 1$  in dobimo:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} F(z) - f(0) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) - f(k) z^{-(k+1)}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} F(z) \right) - f(0) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) - f(k) z^{-(k+1)}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} F(z) \right) - f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} [f(k+1) - f(k)] 1^{-(k+1)}$$

Od tu pa že sledi (4.87), kar smo hoteli dokazati:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = f(0) + f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(3) - f(2) + \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$$

Z-transformacije takšnih diskretnih funkcij, ki jih večinoma uporabljamo, so že izračunane in dane v tabeli na naslednji strani. Iz te tabele lahko preberemo z-transforme in njim seveda tudi pripadajoče inverzne z-transforme.

**Tabela: z–transformi nekaterih diskretnih funkcij**

| $f(k)$                             | $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$                                                                         |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                                  | $\frac{z}{z-1}$                                                                                      |
| $k$                                | $\frac{z}{(z-1)^2}$                                                                                  |
| $k^2$                              | $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$                                                                             |
| $a^k$                              | $\frac{z}{z-a}, \quad  a  <  z $                                                                     |
| $k a^k$                            | $\frac{a z}{(z-a)^2}$                                                                                |
| $e^{\alpha k}$                     | $\frac{z}{z-e^{\alpha}}$                                                                             |
| $e^{-\alpha k}$                    | $\frac{z}{z-e^{-\alpha}}$                                                                            |
| $k e^{-\alpha k}$                  | $\frac{z e^{-\alpha}}{(z-e^{-\alpha})^2}$                                                            |
| $\sin(\omega k T)$                 | $\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$                                               |
| $\cos(\omega k T)$                 | $\frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$                                          |
| $\sin(\omega k)$                   | $\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$                                                     |
| $\cos(\omega k)$                   | $\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$                                                |
| $e^{-\alpha k T} \sin(\omega k T)$ | $\frac{z e^{-\alpha T} \sin(\omega T)}{z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$      |
| $e^{-\alpha k T} \cos(\omega k T)$ | $\frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos(\omega T))}{z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$ |

Če ustrezne funkcije v tabeli ni, si pomagamo na razne načine. Pri inverzni z-transformaciji še največkrat (kot smo to spoznali pri Fourierovi in Laplaceovi transformaciji) pride v poštev uporaba metode parcialnih ulomkov. Pri parcialnih ulomkih moramo upoštevati, da mora biti v števcu ulomka vedno spremenljivka  $z$ , kar bomo v nadaljevanju spoznali na nekaj konkretnih primerih.

### 4.3.4 Računanje in uporaba z-transformacije

z-transformacijo uspešno uporabljamo pri reševanju diferenčnih enačb. Pokažimo možnosti računanja in uporabe –transformacije kar na nekaj primerih.

Primer:

Izračunajmo inverzno z-transformacijo funkcije  $F(z) = \frac{-2z^2}{(z-1)(z-3)}$ .

Rešitev:

Iskano funkcijo formalno zapišemo v obliki  $f(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{-2z^2}{(z-1)(z-3)} \right\}$ .

Funkcijo  $F(z)$  zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov oblike  $\frac{k_\lambda z}{z-a}$ , torej

$$\frac{-2z^2}{(z-1)(z-3)} = \frac{k_1 z}{z-1} + \frac{k_2 z}{z-3}$$

Opomba: Spremenljivke  $z$ , ki jo moramo imeti v števcih na desni strani, ni potrebno pisati, seveda pa moramo vedeti, da jo bomo upoštevali v končnem razcepu. Zgornji ulomek torej zapišemo enostavneje takole:

$$\frac{-2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{k_1}{z-1} + \frac{k_2}{z-3}$$

Vemo, da koeficiente  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , ki so v števcu tistih ulomkov, kjer nastopa le enojni pol, dobimo po formuli

$$k_\lambda = \left[ (z + z_\lambda) \cdot F(z) \right]_{z=-z_\lambda} \text{ za } \lambda=1, 2, \dots, n$$

V tem primeru je

$$k_1 = \left[ (z-1) \frac{-2z}{(z-1)(z-3)} \right]_{z=1} = 1$$

$$k_1 = \left[ (z-3) \frac{-2z}{(z-1)(z-3)} \right]_{z=3} = -3$$

Ulomek zapišemo takole

$$\frac{-2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-1} + \frac{-3}{z-3}$$

Od tod pa že dobimo (uporabimo tabelo z-transformov):

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{-2z^2}{(z-1)(z-3)} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} + \frac{-3z}{z-3} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} - 3 \cdot \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-3} \right\}$$

$$f(k) = 1 - 3^{k+1}.$$

◆◆◆

Primer:

Z uporabo z-transformacije izračunajmo diferenčno enačbo

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = v(k+1) - v(k), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \text{ če so vsi začetni pogoji nič.}$$

Rešitev:

Opravimo z-transformacijo na levi in desni strani diferenčne enačbe.

$$\mathcal{Z}\{y(k+2)\} - 5\mathcal{Z}\{y(k+1)\} + 6\mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{v(k+1)\} - \mathcal{Z}\{v(k)\}$$

Označimo

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z)$$

in

$$\mathcal{Z}\{v(k)\} = V(z)$$

ter upoštevajmo pravili (4.78) in (4.79) za premik v desno, pa imamo

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - 5zY(z) - zy(0) + 6Y(z) = zV(z) - zv(0) - V(z)$$

Ker so vsi začetni pogoji enaki nič, torej  $y(0) = y(1) = v(0) = 0$ , dobimo iz zgornje enačbe enostavnejši zapis:

$$z^2 Y(z) - 5zY(z) + 6Y(z) = zV(z) - V(z)$$



$$Y(z)[z^2 - 5z + 6] = V(z)[z - 1]$$

$$Y(z) = \frac{(z-1)}{z^2 - 5z + 6} V(z) = \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} V(z)$$

Iz zgornje enačbe lahko dobimo rešitev  $y(k)$ , če poznamo funkcijo  $v(k)$ .

Vzemimo, naj bo npr.  $v(k) = k$ .

Za to funkcijo je z-transform (glej tabelo)

$$V(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Za takšno možnost dobimo

$$Y(z) = \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} V(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Iskano diskretno funkcijo  $y(k)$  bomo od tod dobili z inverzno z-transformacijo. Najprej parcialni ulomki

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{k_1 z}{z-1} + \frac{k_2 z}{z-2} + \frac{k_3 z}{z-3}$$

oziroma

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{k_1}{z-1} + \frac{k_2}{z-2} + \frac{k_3}{z-3}$$

Po znanem postopku dobimo

$$k_1 = \left[ (z-1) \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} \right]_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = \left[ (z-2) \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} \right]_{z=2} = -1$$

$$k_3 = \left[ (z-3) \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} \right]_{z=3} = \frac{1}{2}$$

Od tod

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} + \frac{(-1)z}{z-2} + \frac{\frac{1}{2}z}{z-3}$$

in nato še rešitev

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \right\} = \frac{1}{2} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} - \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-2} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-3} \right\}$$

$$y(k) = \frac{1}{2} (1 - 2^{k+1} + 3^k)$$

◆◆◆

#### Primer:

Z uporabo z-transformacije izračunajmo splošno in nato še posebno rešitev diferenčne enačbe  $y_{k+2} - y_k = 2$  pri pogojih  $y_0 = 0$  in  $y_1 = 1$ .

#### Rešitev:

Na diferenčni enačbi opravimo z-transformacijo

$$\mathcal{Z}\{y(k+2)\} - \mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{2\}$$

Upoštevamo (4.79) in dobimo

$$[z^2 \mathcal{Z}\{y(k)\} - z^2 y(0) - zy(1)] - \mathcal{Z}\{y(k)\} = 2 \cdot \mathcal{Z}\{1\}$$

Upoštevamo začetna pogoja ( $y_0 = 0$  in  $y_1 = 1$ ), iz tabele preberemo  $\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}$ , označimo

$\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z)$ , uredimo in dobimo

$$Y(z)(z^2 - 1) = \frac{z^2 + z}{z-1}$$

in od tod

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Rešitev diferenčne enačbe dobimo z inverzno z-transformacijo

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-1)^2} \right\}.$$

Iz tabele z-transformov preberemo  $\mathcal{Z}\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$ , torej je iskana partikularna rešitev

$$y(k) = k.$$

Preverimo še, če je to res rešitev dane diferenčne enačbe  $y_{k+2} - y_k = 2$ .

Zaradi  $y(k) = k$  je  $y(k+2) = k+2$  in razlika  $y_{k+2} - y_k$  je res 2. Tudi začetnima pogoje je zadoščeno:  $y_0 = y(k=0) = 0$  in  $y_1 = y(k=1) = 1$ .

◆◆◆

# TABELE

**Tabela 1: Grška abeceda**

| Z. št. | velike črke | male črke           | slovensko ime | angleško ime |
|--------|-------------|---------------------|---------------|--------------|
| 1.     | A           | $\alpha$            | alfa          | Alpha        |
| 2.     | B           | $\beta$             | beta          | Beta         |
| 3.     | $\Gamma$    | $\gamma$            | gama          | Gamma        |
| 4.     | $\Delta$    | $\delta$            | delta         | Delta        |
| 5.     | E           | $\varepsilon$       | epsilon       | Epsilon      |
| 6.     | Z           | $\zeta$             | dzeta         | Zeta         |
| 7.     | H           | $\eta$              | eta           | Eta          |
| 8.     | $\Theta$    | $\theta$            | theta         | Theta        |
| 9.     | I           | $\iota$             | jota          | Iota         |
| 10.    | K           | $\kappa$            | kapa          | Kappa        |
| 11.    | $\Lambda$   | $\lambda$           | lambda        | Lambda       |
| 12.    | M           | $\mu$               | mi            | Mu           |
| 13.    | N           | $\nu$               | ni            | Nu           |
| 14.    | $\Xi$       | $\xi$               | ksi           | Xi           |
| 15.    | O           | $\omicron$          | omikron       | Omicron      |
| 16.    | $\Pi$       | $\pi$               | pi            | Pi           |
| 17.    | P           | $\rho$              | ro            | Rho          |
| 18.    | $\Sigma$    | $\sigma, \varsigma$ | sigma         | Sigma        |
| 19.    | T           | $\tau$              | tau           | Tau          |
| 20.    | $\Upsilon$  | $\upsilon$          | ipsilon       | Upsilon      |
| 21.    | $\Phi$      | $\phi, \varphi$     | fi            | Phi          |
| 22.    | X           | $\chi$              | hi            | Chi          |
| 23.    | $\Psi$      | $\psi$              | psi           | Psi          |
| 24.    | $\Omega$    | $\omega$            | omega         | Omega        |

**Tabela 2:** *STIRLINGOVA ŠTEVILA 1. VRSTE*  $s_r^n$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ 

$$x^{(n)} = s_1^n x + s_2^n x^2 + \dots + s_n^n x^n$$

| $n \backslash r$ | 0 | 1     | 2       | 3      | 4      | 5     | 6     | 7   | 8   | 9 |
|------------------|---|-------|---------|--------|--------|-------|-------|-----|-----|---|
| 0                | 1 |       |         |        |        |       |       |     |     |   |
| 1                | 0 | 1     |         |        |        |       |       |     |     |   |
| 2                | 0 | -1    | 1       |        |        |       |       |     |     |   |
| 3                | 0 | 2     | -3      | 1      |        |       |       |     |     |   |
| 4                | 0 | -6    | 11      | -6     | 1      |       |       |     |     |   |
| 5                | 0 | 24    | -50     | 35     | -10    | 1     |       |     |     |   |
| 6                | 0 | -120  | 274     | -225   | 85     | -15   | 1     |     |     |   |
| 7                | 0 | 720   | -1764   | 1624   | -735   | 175   | -21   | 1   |     |   |
| 8                | 0 | -5040 | 13068   | -13132 | 6769   | -1960 | 322   | -28 | 1   |   |
| 9                | 0 | 40320 | -109584 | 118124 | -67284 | 22449 | -4536 | 546 | -36 | 1 |

Primer:

$$x^{(5)} = s_1^5 x + s_2^5 x^2 + s_3^5 x^3 + s_4^5 x^4 + s_5^5 x^5 = 24x - 50x^2 + 35x^3 - 10x^4 + x^5$$

**Tabela 3:** *STIRLINGOVA ŠTEVILA 2. VRSTE*  $S_r^n$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ 

$$x^n = S_1^n x^{(1)} + S_2^n x^{(2)} + \dots + S_n^n x^{(n)}$$

| $n \setminus k$ | 0 | 1 | 2   | 3    | 4    | 5    | 6    | 7   | 8  | 9 |
|-----------------|---|---|-----|------|------|------|------|-----|----|---|
| 0               | 1 |   |     |      |      |      |      |     |    |   |
| 1               | 0 | 1 |     |      |      |      |      |     |    |   |
| 2               | 0 | 1 | 1   |      |      |      |      |     |    |   |
| 3               | 0 | 1 | 3   | 1    |      |      |      |     |    |   |
| 4               | 0 | 1 | 7   | 6    | 1    |      |      |     |    |   |
| 5               | 0 | 1 | 15  | 25   | 10   | 1    |      |     |    |   |
| 6               | 0 | 1 | 31  | 90   | 65   | 15   | 1    |     |    |   |
| 7               | 0 | 1 | 63  | 301  | 350  | 140  | 21   | 1   |    |   |
| 8               | 0 | 1 | 127 | 966  | 1701 | 1050 | 266  | 28  | 1  |   |
| 9               | 0 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 |

Primer:

$$\begin{aligned}
 x^6 &= S_1^6 x^{(1)} + S_2^6 x^{(2)} + S_3^6 x^{(3)} + S_4^6 x^{(4)} + S_5^6 x^{(5)} + S_6^6 x^{(6)} = \\
 &= x^{(1)} + 31x^{(2)} + 90x^{(3)} + 65x^{(4)} + 15x^{(5)} + x^{(6)}
 \end{aligned}$$

**Tabela 4: Osnovni podatki o nekaterih matematikih**

| Ime                                                                                 | Živel              | Področja raziskovanja                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------------|
| ABEL, Niels Henrik<br>norveški matematik                                            | 1802-1829          | teorija grup, višja algebra, teorija eliptičnih krivulj            |
| ARHIMED (Ἀρχιμήδης)<br>antični matematik in filozof                                 | 287-212<br>p.n.št. | vsa tedanja matematika                                             |
| BANACH Stefan<br>poljski matematik                                                  | 1892-1945          | utemeljitelj moderne funkcionalne analize                          |
| BARROW Isaac<br>matematik in teolog                                                 | 1630-1677          | infinitezimalni račun                                              |
| BAYES, Thomas<br>britanski matematik                                                | 1702-1761          | verjetnostni račun, statistika                                     |
| BELTRAMI Eugenio                                                                    | 1835-1900          | diferencialna geometrija, matematična fizika                       |
| BERNOULLI, Daniel<br>švicarski matematik in fizik                                   | 1700-1782          | hidrodinamika, kinetična teorija plinov                            |
| BERNOULLI, Johann<br>švicarski matematik                                            | 1667-1748          | variacijski račun, infinitezimalni račun (diferencialne enačbe)    |
| BERNOULLI, Jakob<br>švicarski matematik                                             | 1654-1705          | variacijski račun, verjetnostni račun                              |
| BINET Jacques Philippe Marie<br>francoski matematik in astronom                     | 1786-1856          | teorija števil, diferencialna geometrija, mehanika v astronomiji   |
| BOOLE, George<br>angleški matematik in filozof                                      | 1815-1864          | matematična logika                                                 |
| CANTOR, Georg<br>nemški matematik                                                   | 1845-1918          | množice, logika                                                    |
| CAUCHY, Augustin Louis<br>francoski matematik                                       | 1789-1857          | funkcije, infinitezimalni račun optika, elastomehanika             |
| CRAMER, Gabrijel<br>švicarski matematik                                             | 1704-1752          | sistemi linearnih enačb                                            |
| ČEBIŠEV, Pafnutij Ljvovič<br>ruski matematik                                        | 1821-1894          | teorija števil, infinitezimalni račun, verjetnostni račun          |
| D’ALEMBERT, Jean de Rond<br>francoski matematik, filozof, fizik                     | 1717-1783          | diferencialne enačbe, precesija in nutacija, dinamika              |
| DANTZIG, George Bernard<br>ameriški matematik                                       | 1914-2005          | linearno programiranje, simpleksna metoda                          |
| DE L’HOSPITAL Guillaume Francois Antoine<br>francoski matematik                     | 1661-1704          | infinitezimalni račun                                              |
| DE MOIVRE Abraham<br>francoski matematik                                            | 1667-1754          | geometrija, kompleksna števila, aktuarska matematika               |
| DESCARTES, Rene<br>francoski filozof, matematik, fizik (latinizirano ime CARTESIUS) | 1596-1650          | utemeljitelj analitične geometrije (kartezični koordinatni sistem) |
| EULER, Leonhard<br>švicarski matematik, fizik, astronom                             | 1707-1783          | vsa področja tedanje matematike                                    |

|                                                                       |                   |                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| EVKLID<br>antični matematik                                           | 330-275<br>p.n.š. | geometrija (Evklidska geometrija)                                               |
| FERMAT, Pierre de<br>francoski matematik                              | 1601-1665         | začetnik teorije števil in (skupaj s Pascalom) verjetnostnega računa            |
| FOURIER, Jean Baptiste<br>francoski matematik, fizik in politik       | 1768-1830         | razvoj periodičnih funkcij v vrste                                              |
| GALOIS, Evariste<br>francoski matematik                               | 1811-1832         | teorija grup<br>(umrl v dvoboju)                                                |
| GAUSS, Karl Friedrich<br>nemški matematik in astronom                 | 1777-1855         | geodezija, magnetizem, sferna mehanika                                          |
| HERMITE, Charles<br>francoski matematik                               | 1822-1901         | teorija števil, višja algebra, eliptične funkcije                               |
| JACOBI, Karl Gustav<br>nemški matematik                               | 1804-1851         | teorija eliptičnih funkcij, teorija števil, diferencialni in integralni račun   |
| JORDAN, Marie Ennemond Camille<br>francoski matematik                 | 1838-1922         | algebra, teorija grup                                                           |
| KOLMOGOROV, Andrej Nikolajevič,<br>ruski matematik                    | 1903-1987         | logika, topologija, verjetnostni račun                                          |
| KRONECKER Ludwig Otto<br>nemski matematik                             | 1823-1891         | aritmetika, algebra,                                                            |
| LAGRANGE, Joseph Louis<br>francoski matematik in astronom             | 1736-1813         | diferencialne enačbe, verjetnostni račun, mehanika                              |
| LAMBERT, Johann Heinrich<br>nemški matematik, fizik, astronom         | 1728-1777         | algebra, sferna trigonometrija, hiperbolične funkcije                           |
| LAME, Gabriel<br>francoski matematik                                  | 1795-1870         | specialne funkcije in krivulje                                                  |
| LAPLACE, Pierre Simon, Marquis de,<br>francoski astronom in matematik | 1749-1827         | sferna mehanika, elektrika, toplota, verjetnostni račun                         |
| LEBESGUE, Henry Leon<br>francoski matematik                           | 1875-1941         | posplošitev integrala (Lebesguev integral)<br>teorija mere                      |
| LEGENDRE, Adrien Marie<br>francoski matematik                         | 1752-1833         | teorija števil, linearna algebra                                                |
| LEIBNITZ Gottfried Wilhelm, nemški<br>matematik in filozof            | 1646-1716         | algebrske enačbe, determinante, začetnik diferencialnega in integralnega računa |
| MACLAURIN, Colin<br>škotski matematik                                 | 1698-1746         | matematična analiza                                                             |
| MARKOV, Andrej Andrejevič<br>ruski matematik                          | 1856-1922         | teorija števil, verjetnostni račun, matematična analiza                         |
| MÖBIUS August Ferdinand<br>nemški astronom                            | 1790-1868         | projektivna geometrija, statika                                                 |
| NAPIER John (NEPERO)<br>italijansko-nemški matematik                  | 1550-1617         | logaritmi                                                                       |
| NEWTON, Isaac<br>angleški matematik in fizik                          | 1642-1727         | utemeljitelj infinitezimalnega računa                                           |
| PASCAL, Blaise<br>francoski filozof, matematik in fizik               | 1623-1662         | geometrija, kombinatorika, verjetnostni račun, hidrostatika                     |



|                                                         |                           |                                                                                          |
|---------------------------------------------------------|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| PITAGORA (Πυθαγόρας)<br>antični matematik, filozof      | pribl. 582-<br>507 p.n.š. | števila, geometrija                                                                      |
| PLEMELJ, Josip<br>slovenski matematik                   | 1873-1967                 | linearne diferencialne enačbe,<br>analitične funkcije, teorija števil                    |
| RIEMANN, Bernhard<br>nemški matematik                   | 1826-1866                 | funkcije kompleksne spremenljivke,<br>diferencialne enačbe, geometrija                   |
| ROLLE, Michel<br>francoski matematik in fizik           | 1652-1719                 | algebrske enačbe                                                                         |
| STEFAN, Jožef<br>slovenski matematik, fizik in pesnik   | 1835-1893                 | termodinamika, parabolične enačbe                                                        |
| STIRLING, James<br>škotski matematik                    | 1692-1770                 | teorija števil, kombinatorika                                                            |
| TAYLOR, Brook<br>britanski matematik                    | 1685-1731                 | razvoj funkcij v vrsto                                                                   |
| TORICELLI Evangelista<br>italijanski matematik in fizik | 1608-1647                 | infinitesimalni račun, izumitelj<br>barometra                                            |
| VEGA, Jurij<br>slovenski matematik                      | 1754-1802                 | logaritmi (logaritemske tablice)                                                         |
| VIDAV, Ivan<br>slovenski matematik                      | 1918-2015                 | funkcionalna analiza, algebra,<br>diferencialne enačbe                                   |
| VIETE Francois<br>francoski matematik                   | 1540-1603                 | enačbe, matematična simbolika,<br>kriptografija                                          |
| WEIERSTRASS, Karl<br>nemški matematik                   | 1815-1897                 | analitične funkcije, variacijski račun,<br>diferencialna geometrija, linearna<br>algebra |
| WIENER, Norbert<br>ameriški matematik                   | 1894-1964                 | logika, postavil temelje kibernetike                                                     |
| ZADEH, Lotfi<br>ameriški matematik (Iz Azerbajdžana)    | 1921-                     | mehka logika (fuzzy logic), mehka<br>množica (fuzzy set)                                 |

Več lahko pogledate v raznih enciklopedijah, zanimiva je npr. Wikipedia, ki jo najdete na [http://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page).

## REFERENCE

1. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley&Sons, 1999.
2. Smirnov, V.I., Kurs visšej matematiki, Tom II, Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1967.
3. Smirnov, V.I., Kurs visšej matematiki, Tom III, Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1969.
4. Usenik, J., Matematične metode I, Fakulteta za energetiko UM, 2009.
5. Usenik, J., Matematične metode II, Fakulteta za energetiko UM, 2010.
6. Usenik, J., Upravljanje logističnih sistemov, Biro 4D, Novo mesto, 2003.
7. Vidav. I., Višja matematika II, DZS, Ljubljana, 1975.
8. Vidav. I., Višja matematika III, DZS, Ljubljana, 1976.

## STVARNO IN IMENSKO KAZALO

**A**

|                |     |
|----------------|-----|
| Antidiferenca  | 167 |
| Avtokorelacija | 112 |

**D**

|                                |          |
|--------------------------------|----------|
| Diferencialna enačba           | 131      |
| Diskretna funkcija             | 156      |
| Diference višjega reda         | 164      |
| Diferenčna enačba              | 173      |
| - homogena                     | 177, 181 |
| - nehomogena                   | 182      |
| - s konstantnimi koeficienti   | 177      |
| - s spremenljivimi koeficienti | 181      |

**E**

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| Enotina stopnična funkcija | 112 |
| Enotina impulzna funkcija  | 114 |
| Enačba ploskve             |     |
| - parametrična             | 80  |
| Enačba krivulje            |     |
| - parametrična             | 55  |
| - vektorska                | 57  |
| Enotni tangentni vektor    | 59  |

**F**

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| Fourierova transformacija | 107 |
| Frekvenčni prostor        | 107 |
| Faktorska potenca         | 161 |

**G**

|                      |     |
|----------------------|-----|
| Gaussov izrek        | 97  |
| Geometrični pomen    |     |
| - Dvojnega integrala | 12  |
| - Trojnega integrala | 42  |
| Greenova formula     | 73  |
| Grška abeceda        | 210 |

**H**

|                     |          |
|---------------------|----------|
| Heavisidove formule | 128, 129 |
|---------------------|----------|

**I**

|             |    |
|-------------|----|
| Integral    |    |
| - dvojni    | 9  |
| - trojni    | 39 |
| - krivuljni | 67 |
| - ploskovni | 86 |
| - dvakratni | 16 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| Izolirana singularna točka | 134 |
| Izrek o residuih           | 137 |
| Inverzna transformacija    |     |
| - Fourierova               | 108 |
| - Laplaceova               | 119 |
| - z                        | 193 |

**J**

|                         |        |
|-------------------------|--------|
| Jacobijeva determinanta | 32, 45 |
|-------------------------|--------|

**K**

|                                   |          |
|-----------------------------------|----------|
| Koordinate                        |          |
| - cilindrične                     | 45       |
| - sferne                          | 47       |
| Krivulja v prostoru               | 55       |
| - prostorska                      | 57       |
| - ravninska                       | 57       |
| - enostavna                       | 57       |
| Krivulja, gladka, odsekoma gladka | 68       |
| Konvolucijski integral            | 109, 121 |
| Konvolucijska vsota               | 200      |
| Konvergenčni polmer               | 191      |
| Križna korelacija                 | 111      |

**L**

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| Laplaceova transformacija | 118 |
| Laurentova vrsta          | 135 |
| Ločna dolžina             | 62  |
| Ločni diferencial         | 64  |

**M**

|               |    |
|---------------|----|
| Möbiusov trak | 91 |
|---------------|----|

**N**

|                            |    |
|----------------------------|----|
| Normalna ravnina           | 61 |
| Normalni vektor na ploskev | 83 |

**O**

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| Operator                |     |
| - Progresivnega premika | 170 |
| - Retrogradnega premika | 172 |
| - Diferenčni            | 157 |
| - antidiferenčni        | 167 |
| - Fourierov             | 108 |
| - Laplaceov             | 119 |
| Orientacija             |     |
| - krivulje              | 56  |
| - ploskve               | 90  |

**P**

|                      |            |
|----------------------|------------|
| Ploskev v prostoru   | 79         |
| Ploskev              |            |
| - gladka             | 86         |
| - odsekoma gladka    | 86         |
| - enostranska        | 90         |
| - dvostranska        | 90         |
| - površina           | 95         |
| Ploščina lika        | 22, 77, 79 |
| Pretok (fluks) polja | 87         |
| Prva diferenca       | 157        |

**R**

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| Regularna analitična funkcija | 134 |
| Residuum                      | 136 |
| Reševanje diferenčnih enačb   |     |
| - iterativna metoda           | 175 |
| - z operatorji                | 185 |

**S**

|                     |          |
|---------------------|----------|
| Sklenjena pot       | 68       |
| Smerni vektor       | 59       |
| Spektralna gostota  | 111      |
| Stirlingova števila |          |
| - 1. vrste          | 163, 211 |
| - 2. vrste          | 163, 212 |
| Stokesov izrek      | 101      |

**T**

|                                             |          |
|---------------------------------------------|----------|
| Tabela                                      |          |
| - 1. Diferenc nekaterih diskretnih funkcij  | 161      |
| - Antidiferenc nekaterih diskretnih funkcij | 168      |
| - Fourierovih transformov                   | 116      |
| - Laplaceovih transformov                   | 123, 127 |
| - Z-transformov                             | 204      |
| Tangentna ravnina na ploskev                | 81       |
| Tangenta na krivuljo                        | 58       |
| Težišče                                     | 27       |
| Transform                                   |          |
| - Fourierov                                 | 107      |
| - Laplaceov                                 | 119      |
| - z                                         | 191      |

**U**

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| Uvedba novih spremenljivk v |    |
| - Dvojni integral           | 31 |
| - Trojni integral           | 44 |

**V**

|                     |        |
|---------------------|--------|
| Volumen telesa      | 24, 42 |
| Vztrajnostni moment | 27     |

**Z**

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| z-transformacija                         | 190 |
| Z-transform                              |     |
| - Enostrani                              | 191 |
| - Dvostrani                              | 190 |
| Zveza med z in Laplaceovo transformacijo | 193 |

**Založniška dejavnost**  
**Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu**  
**IZDANE MONOGRAFIJE**

1. **Vpliv uporabe orodij managerjev na ekonomsko donosnost**  
Markič, Mirko; Kreslin, Damijan 2019
2. **Delovni terapevt v inkluzivni šoli: Trenutno stanje in smernice**  
Šuc, Lea 2019
3. **Zrna odličnosti Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu: nove paradigme organizacijskih teorij 2018**  
Bukovec, Boris (ur.) 2019
4. **Zrna odličnosti Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu: nove paradigme organizacijskih teorij 2017**  
Bukovec, Boris (ur.) 2018
5. **Značilnosti sistemov vodenja kakovosti v slovenskih organizacijah in njihov vpliv na poslovno uspešnost organizacij**  
Vinko Bogataj; Gordana Žurga; Adolf Šostar 2018
6. **Menedžment kakovosti in odličnost zdravnikov v javnem zdravstvu**  
Rumpf, Dean; Voga, Gorazd; Meško Štok, Zlatka 2018
7. **Sistemi vodenja kakovosti in modeli odličnosti: ključni dejavniki (ne)uspešnega delovanja (e-knjiga)**  
Škafar, Branko 2018
8. **Temelji avtopoieze v organizaciji: Avtopoietska 4.0 (r)evolucija človeka**  
Balažič Peček, Tanja; Bukovec, Boris 2018
9. **Management varnosti pri delu, delovne razmere in gospodarska učinkovitost (e-knjiga)**  
Pavlič, Miran, Markič, Mirko 2018
10. **Kvalitativno raziskovanje koncepta avtopoieze v organizaciji (e-knjiga)**  
Balažič Peček, Tanja 2018
11. **Podlage in metode za raziskovanje in projektiranje organizacije**  
Ivanko, Štefan 2017
12. **Celostna obravnava dolgotrajne oskrbe v Sloveniji**  
Kavšek, Marta; Bogataj, David 2017
13. **Sodelovalno mreženje in izraba inovacijskega potenciala v turističnem prostoru**  
Colarič-Jakše, Lea-Marija 2017
14. **Model McKinsey 7-S kot kazalnik odličnosti organizacije**  
Kalan, Mateja; Meško, Maja 2017
15. **Nova doktrina organizacije – 2.del: Preusmeritev pozornosti**  
Ovsenik, Jožef; Ovsenik, Marija 2017
16. **Avtopoietska organizacija**  
Bukovec, Boris (ur.) 2017
17. **Kakovost v slovenski javni upravi: Delovanje Odbora za kakovost 1999-2012**  
Žurga, Gordana 2017
18. **Poslovne vrednote mladih v Sloveniji**  
Pinterič, Uroš 2016
19. **Selected topics in modern society (e-knjiga)**  
Kaplánová, Patrícia 2016
20. **Glocalisation of the crisis: could Slovenia survive economic crisis better? (e-knjiga)**  
Pinterič, Uroš 2016

21. **Zrna odličnosti Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu: nove paradigme organizacijskih teorij 2016**  
Bukovec, Boris (ur.) 2016
22. **Pisanje strokovnih in znanstvenih del**  
Brcar, Franc 2016
23. **Education policy as the factor of development (e-knjiga)**  
Pinterič, Uroš 2016
24. **Spregledane pasti informacijske družbe**  
Pinterič, Uroš 2015
25. **Psihosocialni dejavniki tveganja za bolečino v križu pri slovenskih poklicnih voznikih in absentizem**  
Kresal, Friderika; Meško, Maja 2015
26. **Zgodovina organizacijske misli**  
Ivanko, Štefan 2015
27. **Karierno načrtovanje: kako najti v sebi skriti zaklad?**  
Turnšek Mikačič, Marija; Ovsenik, Marija 2015
28. **Sodobni trendi v turizmu**  
Ovsenik, Rok 2015
29. **Selected topics in change management (e-knjiga)**  
Kaplánová, Patrícia (ur.); Pinterič, Uroš (ur.) 2015
30. **Political legacy and youth civic engagement in Slovakia**  
Mihálik, Jaroslav 2015
31. **Turistični prostori različnosti: turizem, turisti in fotografska podoba**  
Ambrož, Milan; Bukovec, Boris 2015
32. **Izobraževanje za turizem v Sloveniji**  
Ovsenik, Rok; Bukovec, Boris; Ovsenik, Marija 2015
33. **Zrna odličnosti Fakultete za organizacijske študije v Novem mestu: nove paradigme organizacijskih teorij 2015**  
Bukovec, Boris (ur.) 2015
34. **Kontrolna teorija sistemov: model za sistemsko razmišljanje v sistemu zdravstvenega varstva**  
Mlakar, Tatjana 2014
35. **Featuring Norden in ten episodes**  
Czarny, Ryszard M. 2014
36. **Sociológia mládeže**  
Macháček, Ladislav 2014
37. **Inter-municipal cooperation in Slovakia : the case of regions with highly fragmented municipal structure**  
Klimovsky, Daniel 2014
38. **Rethinking public policies (e-izdaja)**  
Pinterič, Uroš 2014
39. **Local Governance between democracy and efficiency**  
Jüptner, Petr. (et al.) 2014
40. **Pasti razumevanja politične realnosti : pregled konceptov sodobnega političnega sistema**  
Pinterič, Uroš 2014
41. **Selected issues of administrative reality**  
Pinterič, Uroš; Prijon, Lea 2013
42. **Organizacijske paradigme: podlage za nastanek in razvoj organizacijskih teorij**  
Ivanko, Štefan 2012



RUO

# Revija za univerzalno odličnost

Journal of Universal Excellence

Letnik x, številka x, mesec 20xx

Volume x, Issue x, Month 20xx

interdisciplinarna  
revija, ki združuje  
organizacijske vede  
oz. menedžment in  
univerzalno odličnost,  
tj. poslovno,  
organizacijsko in  
osebno odličnost

znanstvena revija,  
ki poskuša  
odgovarjati na  
ključna vprašanja  
družbene teme pri  
čemer akademsko  
rigoroznost  
nadgrajuje z  
inovativnostjo v  
tematikah in  
pristopu.

ISSN 24

## Izzivi prihodnosti

Challenges of the Future

Letnik x, številka x, mesec

Volume x, Issue x, Month 20xx